Génie Mathématique et Modélisation
Cinquième Année

CONCEPTION OPTIMALE DE FORME

Ph. GUILLAUME, M. MASMOUDI

Résumé de cours

Partie I :

PARAMETRISATION

et

OPTIMISATION DE FORME CLASSIQUE

2002/2003

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Exemples en mécanique des structures

1.1.1 Maximisation de la rigidité

On se donne une structure initiale occupant un domaine Ω. Le déplacement u est solution de

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)\mathbf{n} &= F \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D. \end{aligned} \right.$$

L'objectif est par exemple de minimiser le travail des forces extérieures

$$J = \int_{\Gamma_N} \sigma(u)\mathbf{n}.u \, ds = \int_{\Omega} \sigma(u).\varepsilon(u) \, dx.$$

Les paramètres à optimiser peuvent être la forme (Γ), ou des propriétés de matériau, avec d'éventuelles contraintes (volume, masse...).

1.1.2 Maximisation de la première valeur propre

Le problème de dynamique dans l'exemple précédent (ici avec des forces volumiques) s'écrit

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) - \omega^2 u &= F \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)\mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D. \end{aligned} \right.$$

Ce problème est mal posé si ω^2 est valeur propre. Les valeurs propres sont stricement positives, et un problème typique d'optimisation de strucutre consiste à maximiser la plus petite valeur propre.

1.2 Exemple en mécanique des fluides

Dans le modèle de Stokes, la vitesse u est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ u = u_\infty & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

L'objectif est par exemple de minimiser la traînée, c.a.d. la puissance des forces extérieures

$$J = \int_{\Gamma_1} \sigma(u)\mathbf{n}.u\, ds = \int_\Omega \sigma(u).\varepsilon(u)\, dx.$$

Ce problème ressemble beaucoup à l'exemple précédent.

1.3 Exemple en électromagnétisme

On considère la jonction de deux guides d'ondes, alimentés par un champ électromagnétique incident E^i. En partant des équations de Maxwell, on obtient le système

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot} E - \beta^2 E = 0 & \text{dans } \Omega \\ E \wedge \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \operatorname{rot}(E - E_i) \wedge \mathbf{n} + ik(E - E_i) = 0 & \text{sur } S \cup S' \end{cases}$$

avec $\beta = 2\pi f/c$ et $k = \sqrt{\beta^2 - (\pi/a)^2}$. Ici on cherche à diminuer le plus possible le coefficient de réflexion

$$S_{11} = \int_S (E - E_i)_\tau\, ds$$

sur une bande de fréquence donnée $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$.

1.4 Objectifs du cours

Après discrétisation (par éléments finis par exemple), ces exemples se mettent sous la forme générale

$$\min_\alpha j(\alpha)$$

où $j(\alpha) = J(\alpha, x(\alpha))$ et $x(\alpha)$ est la solution d'un système linéaire de la forme

$$A(\alpha)x(\alpha) = b(\alpha).$$

Nous montrerons pourquoi et comment calculer $\nabla j(\alpha)$ ainsi que des dérivées d'ordre supérieur, nous étudierons l'erreur de discrétisation et terminerons cette première partie par le cas de paramètres de forme dans le cas de variations à topologie constante. L'optimisation à topologie variable fera l'objet de la second partie.

Chapitre 2

Calcul des dérivées

2.1 Cadre général

Les exemples du premier chapitre sont de la forme

$$\min_{\alpha} j(\alpha)$$

où α est un vecteur de paramètres réels (ou éventuellement complexes), $j(\alpha) = J(\alpha, u(\alpha))$ et $u(\alpha) \in \mathcal{V}$ est la solution d'un système linéaire de la forme

$$a(\alpha, u(\alpha), v) = l(\alpha, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{2.1}$$

La version discrète est de la même forme avec $\mathcal{V}$ remplacé par un espace d'éléments finis $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. La fonction coût discrète est

$$j_h(\alpha) = J(\alpha, u_h(\alpha))$$

où $u_h(\alpha) \in \mathcal{V}_h$ est solution

$$a(\alpha, u_h(\alpha), v_h) = l(\alpha, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \tag{2.2}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$A(\alpha)x(\alpha) = b(\alpha)$$

avec

$$u_h(\alpha) = \sum_{j=1}^{d} x_j(\alpha) e_j,$$

les e_j formant une base de l'espace des éléments finis.

2.2 Méthodes directes et adjointes pour le calcul des dérivées

Soit le système paramétré, dont la solution est appelée **état direct :**

$$A(\alpha)x(\alpha) = b(\alpha), \quad x(\alpha), b(\alpha) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Proposition 2.1 *On suppose que les applications $\alpha \longmapsto A(\alpha)$ et $\alpha \longmapsto b(\alpha)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^m$, et que $A(\alpha)$ est inversible pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Alors $\alpha \longmapsto x(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{O}$, ainsi que $\alpha \longmapsto j(\alpha)$ si J est st de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{O}\times\mathbb{R}^n$.*

Remarque : on peut remplacer $\mathcal{C}^k$ par k fois dérivable.

2.2.1 Dérivée par la méthode directe

C'est l'approche obtenue par dérivation de la fonction coût $j_h(\alpha) = J(\alpha, u_h(\alpha))$ que nous noterons par abus de notation $j_h(\alpha) = J(\alpha, x(\alpha))$. Cela donne (la notation ∂_i sera exclusivement réservée à la dérivation par rapport à α_i) :

$$\partial_i j_h(\alpha) = \partial_i J(\alpha, x(\alpha)) + D_x J(\alpha, x(\alpha))\partial_i x(\alpha) \tag{2.4}$$

où $\partial_i x(\alpha)$ est solution de

$$A(\alpha)\partial_i x(\alpha) = -\partial_i A(\alpha)x(\alpha) + \partial_i b(\alpha), \tag{2.5}$$

équation obtenue en dérivant (2.3).

Le calcul de $j_h(\alpha)$ et $\nabla j_h(\alpha)$ nécessitera donc en tout la résolution de $m+1$ systèmes.

2.2.2 Dérivée par la méthode adjointe

A partir de (2.4) et (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\partial_i j_h(\alpha) &= \partial_i J(\alpha, x(\alpha)) + D_x J(\alpha, x(\alpha))z \\ z &= A^{-1}(\alpha)[-\partial_i A(\alpha)x(\alpha) + \partial_i b(\alpha)].\end{aligned}$$

En utilisant le gradient de J, on a

$$\begin{aligned}D_x J(\alpha, x(\alpha))z &= \nabla_x J(\alpha, x(\alpha)).z \\ &= A^{-T}(\alpha)\nabla_x J(\alpha, x(\alpha)).[-\partial_i A(\alpha)x(\alpha) + \partial_i b(\alpha)] \\ &= y(\alpha).[\partial_i A(\alpha)x(\alpha) - \partial_i b(\alpha)]\end{aligned}$$

où l'on a posé $y(\alpha) = -A^{-T}(\alpha)\nabla_x J(\alpha, x(\alpha))$. On dit que $y(\alpha)$ est l'**état adjoint**, solution de

$$A^T(\alpha)y(\alpha) = -\nabla_x J(\alpha, x(\alpha)). \tag{2.6}$$

Nous avons donc obtenu

$$\partial_i j_h(\alpha) = \partial_i J(\alpha, x(\alpha)) + y(\alpha).[\partial_i A(\alpha)x(\alpha) - \partial_i b(\alpha)].$$

Ce résultat peut être obtenu également à partir du lagrangien

$$L(\alpha, x, y) = J(\alpha, x) + [A(\alpha)x - b(\alpha)].y.$$

Proposition 2.2 *Sous les hypothèses de la proposition2.1 avec k=1, on a*

$$\partial_i j_h(\alpha) = \partial_i J(\alpha, x(\alpha)) + D_x J(\alpha, x(\alpha))\partial_i x(\alpha)$$

avec

$$A(\alpha)\partial_i x(\alpha) = -\partial_i A(\alpha)x(\alpha) + \partial_i b(\alpha),$$

ainsi que

$$\partial_i j_h(\alpha) = \partial_i L(\alpha, x(\alpha), y(\alpha))$$

avec

$$A^T(\alpha)y(\alpha) = -\nabla_x J(\alpha, x(\alpha)).$$

On remarque que calcul de $j_h(\alpha)$ et $\nabla j_h(\alpha)$ via l'état adjoint ne nécessite plus que la résolution de 2 systèmes (au lieu de $m+1$).

2.2.3 Généralisation au cas non linéaire

Exercice

2.2.4 Dans quel ordre dériver et discrétiser

Exercice

2.3 Cas des éléments propres

La discrétisation du problème aux valeurs propres de l'introduction s'écrit

$$[K(\alpha) - \omega^2(\alpha)M(\alpha)]x(\alpha) = 0$$

où K et M sont deux matrice SDP. C'est un problème aux valeurs propres généralisé, qui peut se ramener à un problème aux valeurs propres ordinaire, par exemple en multipliant par M^{-1}, ou à gauche et à droite par $M^{-1/2}$.

2.3.1 Différentiabilité

On considère le problème aux éléments propres ($A(\alpha) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda(\alpha) \in \mathbb{C}$, $x(\alpha) \in \mathbb{C}^n$) :

$$\begin{aligned} A(\alpha)x(\alpha) &= \lambda(\alpha)x(\alpha) \\ x(\alpha) &\neq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Proposition 2.3 *On suppose que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^m$, et que λ_0 est est une valeur propre simple de $A(\alpha_0)$, $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. Alors il existe un voisinage V de α_0 et deux fonctions λ et x de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathcal{O}$, à valeur respectivement dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^n$, telles que l'on ait (2.7) avec $\lambda(\alpha_0) = \lambda_0$.*

Exercice : ce résultat se généralise en partie au cas d'une valeur propre multiple en α_0 de multiplicité d, à condition que $A(\alpha_0)$ soit diagonalisable : il existe une paramétrisation différentialbe d'un sous-espace stable de la forme

$$\begin{aligned} A(\alpha)X(\alpha) &= X(\alpha)\Lambda(\alpha) \quad X(\alpha) \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{C}) \\ X^*(\alpha)X(\alpha) &= I_d \end{aligned}$$

où $\Lambda(\alpha)$ est une matrice à priori pleine qui vérifie $\Lambda(\alpha_0) = \lambda_0 I_d$. Par contre, il se peut très bien que les valeurs propres elles-même (et les vecteurs propres correspondants) ne soient pas différentiables. On utilisera le lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont le noyau est de dimension d, soit $X \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{C})$ une matrice de rang d qui a pour image* $\ker B$. *Alors il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{C})$ telle que*

$$Y^*B = 0 \text{ et } Y^*X = I_d.$$

Dans le cas particulier où $A(\alpha)$ est hermitienne et $m = 1$ (un seul paramètre réel), alors les valeurs propres sont dérivables dans tous les cas (théorème de Rellich [7]).

2.3.2 Calcul des dérivées

On revient au système (avec $\lambda(\alpha) = \omega^2(\alpha)$) :

$$[K(\alpha) - \lambda(\alpha)M(\alpha)]x(\alpha) = 0, \tag{2.8}$$

auquel on rajoute la condition $x^T(\alpha_0)M(\alpha_0)x(\alpha) = 1$ (ce choix est arbitraire, on peut aussi considérer d'autres conditions comme $x^T(\alpha)M(\alpha)x(\alpha) = 1$). On suppose que α_0 est une valeur propre simple. En dérivant l'équation (2.8), et en multipliant à gauche par x^T, on obtient au point α_0 :

$$\partial_i \lambda = \frac{x^T[\partial_i K - \lambda \partial_i M]x}{x^T M x}.$$

La dérivée au point α_0 du vecteur propre est la solution unique du système augmenté

$$[K - \lambda M]\partial_i x - \partial_i \lambda M x = -[\partial_i K - \lambda \partial_i M]x$$
$$x^T M \partial_i x = 0$$

mais aussi du système obtenu par addition de la première ligne avec $xx^T M \partial_i x = 0$:

$$[K - \lambda M + xx^T M]\partial_i x = -[\partial_i K - \partial_i \lambda M - \lambda \partial_i M]x.$$

Remarque : le calcul de l'état adjoint est inutile pour déterminer la dérivée de λ.

2.4 Dérivées d'ordre élevé

Bien que traditionnellement l'optimisation n'utilise que des dérivées d'ordre 1 ou 2, nous verrons qu'il peut être intéressant d'utiliser des dérivées d'ordre plus élevé, tant pour l'efficacité des calculs que pour leur précision. Nous supposerons ici que le problème est analytique. Cette hypothèse est souvent vérifiée dans la pratique, mais elle peut être relaxée, auquel cas les résultats que l'on obtient sont plus faibles.

Le calcul des dérivées successives permet d'approcher $j_h(\alpha) = J(\alpha, x(\alpha))$ par un développement en série de Taylor par rapport à α :

$$j_h(\alpha) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\alpha^k}[J(\alpha_0, x(\alpha_0))](\alpha - \alpha_0)^k$$

Ce polynôme fait naturellement intervenir les dérivées successives de J et de x. Nous prśentons le calcul des dérivées et l'estimation d'erreur pour $x(\alpha)$, l'extension à la fonction coût elle même ne présentant aucune difficulté.

2.4.1 Description de la méthode

A chaque étape d'un algorithme d'optimisation de $j_h(\alpha) = J(\alpha, x(\alpha))$, l'essentiel du coût de calcul provient souvent de la résolution du système

$$A(\alpha)x(\alpha) = b(\alpha)$$

obtenue typiquement par une factorisation LU de la matrice $A(\alpha)$, et ce *pour chaque nouvelle valeur de α.*

Pour simplifier, on suppose que l'on a qu'un seul paramètre α, supposé ici complexe, et que $alpha_0 = 0$. Si A et b sont analytiques autour de l'origine et si $A(0)$ est inversible, alors x est analytique sur un voisinage de l'origine et l'on a localement

$$A(\alpha) = \sum_{k \geq 0} A_k \alpha^k$$
$$b(\alpha) = \sum_{k \geq 0} b_k \alpha^k$$
$$x(\alpha) = \sum_{k \geq 0} x_k \alpha^k$$

avec

$$\begin{aligned} A_0x_0 &= b_0 \\ A_0x_1 &= -A_1x_0 + b_1 \\ &\vdots \\ A_0x_n &= -\sum_{k=1}^{n} A_kx_{n-k} + b_n \end{aligned}$$

ces systèmes faisant appel à la *même factorisation* de $A_0 = A(0)$. En notant r le rayon de convergence de la série $x(\alpha)$, une bonne approximation de $x(\alpha)$ peut alors être obtenue localement : pour tout compact K de $D(0, r)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que pour tout $\alpha \in K$, on ait

$$\left\| x(\alpha) - \sum_{k=0}^{n} x_k\alpha^k \right\| \leq \varepsilon.$$

En fait, une bonne approximation *par rapport à la solution du problème continu* peut être obtenue alors même que la série $x(\alpha)$ diverge. C'est ce que nous examinons au prochain paragraphe.

2.4.2 Erreur de discrétisation sur les dérivées

Soit $(e_j)_{j=1}^{d}$ la base standard de l'espace d'éléments finis utilisés. On désigne par h la taille du plus grand élément de la triangulation. La solution du problème discret est

$$u_h(\alpha) = \sum_{j=1}^{d} x_j(\alpha)e_j$$

dont le développement en série s'écrit

$$u_h(\alpha) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j=1}^{d} x_{kj}e_j\alpha^k =: \sum_{k\geq 0} u_{hk}\alpha^k, \quad u_{hk} \in \mathcal{V}_h$$

alors que la solution du problème continu est de la forme

$$u(\alpha) = \sum_{k\geq 0} u_k\alpha^k, \quad u_k \in \mathcal{V}.$$

Nous supposons ici que cette série converge sur un disque $D(0, r)$, mais nous ne faisons pas d'hypothèse à priori sur le rayon de convergence de la série $u_h(\alpha)$. Sous certaines hypothèses, on montre alors qu'il existe des constantes c_k, $k \geq 0$, telles que

$$\|u_k - u_{hk}\|_1 \leq c_k h.$$

Pour cela on utilise la version simplifiée du lemme de Strang, où a et l sont respectivement des formes bilinéaires et linéaires continues :

Lemme 2.5 *Soient les systèmes*

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$
$$a(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v \in \mathcal{V}_h$$

où a est c-coercive ($a(u,u) \geq c \|u\|_1^2$) et M-continue($a(u,v) \leq M \|u\|_1 \|v\|_1$), $c, M > 0$. Alors

$$c\,\|u - u_h\|_1 \leq M \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_1 + \|l - l_h\|_{\mathcal{V}'}\,.$$

On alors le résultat suivant.

Proposition 2.6 *Soient $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset B(0,r)$. Il existe un entier N et $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \leq h_0$ et tout $\alpha \in K$, on ait*

$$\left\| u(\alpha) - \sum_{k=0}^{N} u_{hk} \alpha^k \right\|_1 \leq \varepsilon.$$

Chapitre 3

Dérivation par rapport à la forme

3.1 Introduction

On considère le problème modèle de la barre de torsion, de section Ω (fig. 3.1) d'aire donnée et de bord Γ.

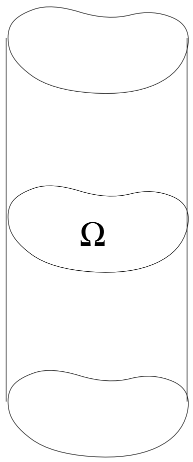

FIG. 3.1: *barre élastique*

La rigididité à la torsion à maximiser a pour expression

$$\widetilde{j}(\Omega) = \widetilde{J}(\Omega,\, u_\Omega)$$
$$\widetilde{J}(\Omega, u_\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 \; dx = 2 \int_\Omega u_\Omega \; dx$$

où u_Ω est la solution de

$$\begin{aligned} -\Delta\, u_\Omega &= 2 \quad \text{dans } \Omega \\ u_\Omega &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

La variable à optimiser est donc Ω. Problème : comment calculer la dérivée de $\widetilde{j}$ par rapport à Ω ? Une manière de procéder est par transformation d'un domaine initial Ω en un domaine $F(\Omega)$. La fonction coût est alors redéfinie par

$$\begin{aligned} j(F) &= \widetilde{j}(F(\Omega)) \\ &= 2\int_{F(\Omega)} u_{F(\Omega)}\ dx' \\ &= 2\int_{\Omega} u_{F(\Omega)} \circ F(x)\ JF(x)\, dx. \end{aligned}$$

Ceci nous amène à supposer que

$$\begin{aligned} F &\in W^{1,\infty}(B) \\ F^{-1} &\in W^{1,\infty}(F(B)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où la boule $B = B(0, R)$ contient $\overline{\Omega}$ et $W^{1,\infty}(B)$ est muni de la norme (ici $n = 2$)

$$||F||_{1,\infty} = ||F||_{L^\infty(B;R^n)} + ||DF||_{L^\infty(B;\mathcal{L}(R^n,R^n))}.$$

On note U l'ensemble des $F \in W^{1,\infty}(B)$ qui vérifient (3.1) et $\det DF > 0$. C'est un ouvert de $W^{1,\infty}(B)$. Une transformation $F \in U$ induit homéomorphisme entre Ω et $F(\Omega)$: dans ce cadre, l'optimisation de forme se fait ainsi nécessairement à topologie fixée.

On pose

$$u_F = u_{F(\Omega)} \circ F \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci permet de se ramener à un espace fonctionnel indépendant de F. Quelle est alors l'équation vérifiée par u_F ? on a par définition de $u_{F(\Omega)}$

$$\begin{aligned} -\Delta\, u_{F(\Omega)} &= 2 \quad \text{dans } F(\Omega) \\ u_{F(\Omega)} &= 0 \quad \text{sur } F(\Gamma) \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle est

$$\begin{gathered} \widetilde{a}(F(\Omega), u_{F(\Omega)}, v) = \widetilde{l}(F(\Omega), v) \quad \forall v \in H_0^1(F\Omega)) \\ \int_{F(\Omega)} \nabla u_{F(\Omega)}.\nabla v\ dx' = 2\int_{F(\Omega)} v\ dx' \quad \forall v \in H_0^1(F\Omega)) \end{gathered}$$

qui peut s'écrire aussi avec $JF = |\det DF|$ ($= \det(DF)$ pour $F \in U$)

$$\begin{gathered} \int_{F(\Omega)} \nabla(u_F \circ F^{-1}).\nabla(v \circ F^{-1})\, dx' = 2\int_{F(\Omega)} (v \circ F^{-1})\, dx' \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} DF^{-T}\nabla u_F.DF^{-T}\nabla v\, JF\ dx = 2\int_{\Omega} vJF\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{gathered}$$

Ici on a exploité le fait que l'application $u \mapsto u \circ F^{-1}$ est isomorphisme d'espace vectoriel entre $H_0^1(F(\Omega))$ et $H_0^1(\Omega)$ pour $F \in U$ [10]. Formellement, en posant pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(F,u,v) &= \widetilde{a}(F(\Omega), u \circ F^{-1}, v \circ F^{-1}) \\ l(F,v) &= \widetilde{l}(F(\Omega), v \circ F^{-1}) \end{aligned}$$

nous avons transporté le problème et la solution de $F(\Omega)$ sur Ω, avec $u_F \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$a(F,u_F,v) = l(F,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

On peut observer que l'opérateur $A(F)$ défini par

$$a(F,u,v) = (A(F)u,v)_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

est un automorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Les fonctions coût elles-même sont redéfinies par

$$\begin{aligned} J(F,u) &= \widetilde{J}(F(\Omega), u \circ F^{-1}) \\ j(F) &= \widetilde{j}(F(\Omega))\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$j(F) = J(F,u_F). \tag{3.4}$$

3.2 Dérivabilité

3.2.1 Résultat général

Ici nous supposons que $a(F,.,.)$ et $l(F,.)$ sont des formes respectivement bilinéaires et linéaires continues sur $\mathcal{V}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et que $A(F)$ défini par (3.3) est un automorphisme de $\mathcal{V}(\Omega)$ pour tout $F \in U$ (on peut en fait être amené à restreindre U pour tenir compte des conditions aux limites, point sur lequel nous ne nous étendrons pas).

Théorème 3.1 *Soit u_F la solution de (3.2). Si les applications $F \mapsto a(F,.,.)$ et $F \mapsto l(F,.)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) sur U, alors l'application $F \mapsto u_F$ est de classe $\mathcal{C}^k$; de plus, si J est de classe $\mathcal{C}^k$, alors j est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.*

Remarque : on peut remplacer $\mathcal{C}^k$ par k fois dérivable.

3.2.2 Critères de dérivabilité

L'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : U & \to & L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \\ F & \mapsto & DF^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que les applications $F \mapsto a(F,.,.)$ et $F \mapsto l(F,.)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U dans le cas du problème modèle, auquel on peut donc appliquer le théorème.

Pour une équation de la forme

$$\begin{aligned} -\Delta\, u_{F(\Omega)} &= f \quad \text{dans } F(\Omega) \\ u_{F(\Omega)} &= 0 \quad \text{sur } F(\Gamma) \end{aligned}$$

la forme linéaire devient

$$l(F, v) = \int_\Omega v\,(f \circ F)\, JF\, dx.$$

On peut montrer le résultat suivant (Murat et Simon [9]).

Lemme 3.2 *Si $f \in H^{k-1}(R^n)$, $k \geq 1$, alors l'application $F \mapsto (f \circ F)\, JF$ est k fois dérivable de U dans $H^{-1}(\Omega)$.*

Enfin, pour le cas d'une équation à coefficients variables de la forme

$$-\mathrm{div}(A \nabla\, u_{F(\Omega)}) = f \quad \text{dans } F(\Omega)$$

on montre que si $A \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, alors l'application $F \mapsto A \circ F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $L^\infty(\Omega)$, d'où l'on déduit que $F \mapsto a(F,.,.)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, et l'on peut de nouveau appliquer le théorème.

3.3 Calcul des dérivées

On se place dans l'hypothèse où les différentes fonctions en cause sont dérivables, dont $F \mapsto u_F$, $u_F \in \mathcal{V}(\Omega)$ étant la solution de

$$a(F, u_F, v) = l(F, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega). \tag{3.5}$$

Pour le calcul des dérivées, la démarche est la même que dans le cas discret.

3.3.1 Méthode directe

Pour $F \in U$ et $V \in W^{1,\infty}(B)$, on note $\dot{u}_F.V$ la dérivée de $F \mapsto u_F$ au point F dans la direction V. La fonction $\dot{u}_F.V$ est la solution obtenue par dérivation de (3.5) :

$$a(F, \dot{u}_F.V, v) = -D_F a(F, u_F, v)V + D_F l(F, v)V \qquad \forall\, v \;\in\; \mathcal{V}(\Omega)$$

et l'application de la règle de la chaîne dans (3.4) donne

$$Dj(F)V = D_F J(F,\, u_F)V + D_u J(F,\, u_F)(\dot{u}_F.V).$$

3.3.2 Méthode adjointe

La méthode adjointe (ou du lagrangien) en optimisation de forme a été introduite par Jean Céa [2]. Le lagrangien est défini sur $U \times \mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ par

$$\mathcal{L}(F, u, v) \;=\; J(F, u) + a(F, u, v) - l(F, v).$$

Théorème 3.3 *Soit $v_F \in \mathcal{V}(\Omega)$ la solution ("état adjoint") de l'équation*

$$a(F, w, v_F) = -D_u J(F, u_F)w \qquad \forall\, w \;\in\; \mathcal{V}(\Omega).$$

Alors, pour tout $V \in W^{1,\infty}(B)$ on a

$$Dj(F)V = D_F\mathcal{L}(F, u_F, v_F)V.$$

Avant d'illustrer ce résultat sur le problème modèle, donnons d'abord l'expression de quelques dérivées usuelles qui apparaissent en optimisation de forme.

3.3.3 Dérivées de quelques fonctions de base

Lemme 3.4 *La dérivéee de $\rho : F \mapsto \det DF$ est donnée par*

$$(D\rho(F)V)(x) = DF^c(x) : DV(x) \quad \forall x \in B$$

où A^c désigne la matrice des co-facteurs ($A^cA^T = \det(A)I$), et celle de $\sigma : F \mapsto DF^{-1}$ est donnée par

$$(D\sigma(F)V)(x) = -DF^{-1}(x)DV(x)\, DF^{-1}(x) \quad \forall x \in B.$$

En utilisant les lemmes 3.2 et 3.4, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.5 *Soient $u, v \in H^1_0(\Omega)$ et $f \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Pour $F \in U$, on considère les fonctions*

$$g(F) = \int_{F(\Omega)} v \circ F^{-1} f \;\, dx'$$

$$h(F) = \int_{F(\Omega)} \nabla(u \circ F^{-1}).\nabla(v \circ F^{-1}) \; dx'.$$

La fonction g est k fois dérivable et la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, leur dérivées au point $F = I$ sont données par

$$Dg(I)V = -\int_\Omega f \nabla v.V \, dx$$
$$Dh(I)V = \int_\Omega -(DV + DV^T)\nabla u.\nabla v + \nabla u.\nabla v \operatorname{div} V \; dx.$$

Remarque : en cas de régularité suffisante de f, $Dg(I)V$ peut s'écrire

$$Dg(I)V = \int_\Omega v(f \operatorname{div} V + \nabla f.V)\, dx.$$

3.3.4 Application à l'équation de Poisson.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u_{F(\Omega)} \in H_0^1(F(\Omega))$ la solution de l'équation

$$-\Delta\, u_{F(\Omega)} = f \qquad \text{dans } F(\Omega).$$

Soit la fonction coût (l'énergie)

$$\widetilde{j}(F(\Omega)) = \widetilde{J}(F(\Omega),\, u_{F(\Omega)}) = \int_{F(\Omega)} f \; u_{F(\Omega)} \; dx.$$

La solution transportée $u_F = u_{F(\Omega)} \circ F$ est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$a(F,\, u_F,\, v) = l(F,\, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
$$a(F,\, u,\, v) = \int_\Omega DF^{-T}\nabla u.DF^{-T}\nabla v\, JF \; dx$$
$$l(F,\, v) = \int_\Omega f \circ F \; v\, JF \; dx$$

et la fonction coût devient

$$j(F) = J(F,\, u_F)$$
$$J(F,\, u) = \int_\Omega f \circ F \; u \; JF \; dx.$$

D'après le lemme 3.2, la fonction j est dérivable. Par la méthode directe, on obtient pour $V \in W^{1,\infty}(B)$:

$$Dj(I)V = \int_\Omega -f\nabla u_I.V + f\, \dot{u}_I.V \; dx.$$

Le lagrangien et sa dérivée par rapport à $F \in U$, calculée au point $F = I$, sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F,u,v) &= \int_\Omega ((u-v)f\circ F + DF^{-T}\nabla u.DF^{-T}\nabla v)JF\,dx\\ D_F\mathcal{L}(I,u,v)V &= \int_\Omega -f\nabla(u-v).V + \nabla u.\nabla v\,\mathrm{div}V\\ &\quad - DV^T\nabla u.\nabla v - \nabla u.DV^T\nabla v\,dx.\end{aligned}$$

Compte tenu ici de $J = l$, on trouve que $v_I = -u_I$, d'où l'on déduit que

$$Dj(I)V = \int_\Omega -2f\nabla u_I.V - |\nabla u_I|^2\,\mathrm{div}V + 2\,DV\,\nabla u_I.\nabla u_I\,dx. \tag{3.6}$$

3.4 Expression intrinsèque de la dérivée

3.4.1 Résultat général

En principe, la fonction coût $j(F) = \widetilde{j}(F(\Omega))$ ne dépend que de l'ouvert $F(\Omega)$, et non du choix particulier de F. Autrement dit c'est la déformation du bord qui importe. Nous allons en déduire que la dérivée $Dj(I)V$ ne dépend que des valeurs de V sur le bord Γ, et non des valeurs de V à l'intérieur du domaine Ω. Cela a pour conséquence que l'expression de la dérivée peut se ramener à une intégrale sur le bord Γ, ne faisant donc intervenir que la variation du bord, d'où le terme "intrinsèque" appliqué à une telle expression.

On suppose dans tout ce qui suit que l'ouvert borné Ω a un nombre fini de composantes connexes.

Lemme 3.6 *Soit $F \in U$. Il existe $r_F > 0$ tel que si $G \in B(F, r_F)$, alors*

$$F(\Omega) = G(\Omega) \Leftrightarrow F(\Gamma) = G(\Gamma)$$

On en déduit les deux résultats suivants [9].

Proposition 3.7 *Soit j une fonction différentiable sur U telle que $j(F) = j(G)$ si $F(\Omega) = G(\Omega)$. Soit $F \in U$. Alors, si $V, W \in W^{1,\infty}(B)$ vérifient $V(x) = W(x)$ pour tout $x \in \Gamma$, on a*

$$Dj(F)V = Dj(F)W.$$

Formulé autrement : si $V(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma$, alors $Dj(F)V = 0$. Une variante plus précise de cette proposition est la suivante.

Proposition 3.8 *On suppose de plus que Γ admet en tout point une normale $\mathbf{n}$, et que le champ V est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, si $V(x).\mathbf{n}(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma$, on a*

$$Dj(F)V = 0.$$

En ce qui concerne la dérivée (par rapport à F) de la solution elle-même, et en définissant $u'_\Omega.V$ par la relation

$$\dot{u}_I.V = u'_\Omega.V + \nabla u_I.V$$

(on appelle $u'_\Omega.V$ la dérivée *locale*), on montre que

$$V = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \Longrightarrow \quad u'_\Omega.V = 0.$$

3.4.2 Expression intégrale sur le bord

On suppose que les applications j et $F \longmapsto u_F$ sont différentiables au point $F = I$.

Proposition 3.9 *Soit $l \in W^{1,\infty}(B)'$. On suppose que :*
(i) Si $V = 0$ sur Γ, alors $l(V) = 0$,
(ii) le bord Γ est de classe $\mathcal{C}^1$par morceaux,
(iii) la forme linéaire l s'écrit sous la forme

$$l(V) = \int_\Omega b\,\dot{u}_I.V + A : DV + L.V \ dx$$

où les fonctions A, L et b appartiennent respectivement à $W^{1,1}(\Omega)^{N\times N}$, $L^1(\Omega)^N$ et $L^2(\Omega)$. Alors

$$l(V) = \int_\Omega b\,u'_\Omega.V \ dx + \int_\Gamma A : (V\,n^T) \ ds.$$

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 3.10 *Soit $l_0 \in W^{1,\infty}(B)'$. On suppose que :*
(i) Si $V = 0$ sur Γ, alors $l_0(V) = 0$,
(ii) il existe $L_0 \in L^1(\Omega)^N$ tel que $l_0(V) = \int_\Omega L_0.V \ dx$.
Alors $l_0 = 0$.

Preuve de la proposition : on a

$$l(V) = \int_\Omega a\,(u'_\Omega.V + \nabla u_I.V) + A : DV + L.V \ dx$$

et d'après la formule de Green

$$l(V) = \int_\Omega \sum_{i,j} (-\partial_j A_{ij} + L_i + a\,\partial_i\,u_I)V^i + a\,u'_\Omega.V\,dx + \int_\Gamma A : (V\,n^T) \ ds.$$

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme à la forme linéaire l_0 définie par

$$l_0(V) = l(V) - \int_\Omega a\,u'_\Omega.V\,dx - \int_\Gamma A : (V\,n^T) \ ds.$$

3.4.3 Application au problème modèle

On suppose le bord Γ de classe $\mathcal{C}^1$. la solution u_I is alors dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. En appliquant le proposition 3.9 à l'expression (3.6) avec $f = 2$, on obtient

$$Dj(I)V = \int_\Gamma -|\nabla\, u_I|^2\, V.\mathbf{n}\; + 2(V.\nabla u_I)(\mathbf{n}.\nabla u_I)\; ds.$$

En utilisant le fait que $\nabla u_I(s)$ et la normale $\mathbf{n}(s)$ sont colinéaires, cette intégrale se réduit à

$$Dj(I)V = \int_\Gamma |\nabla\, u_I|^2\, V.\mathbf{n}\; ds.$$

3.4.4 Exemple de condition d'optimalité du premier ordre

On suppose ici que la dérivée de j est de la forme

$$Dj(I)V = \int_\Gamma g\, V.\mathbf{n}\; ds$$

et que l'ouvert optimal cherché est de mesure imposée, égale à 1 par exemple. On peut donc s'imposer la contrainte

$$F \in S = \{F \in U,\; h(F) = 1\}$$

avec

$$h(F) = \int_{F(\Omega)} dx = \int_\Omega JF\, dx.$$

Proposition 3.11 *Si I est un mimimum local de j sur S, alors g est constant sur le bord Γ.*

Le problème modèle peut alors se reformuler de la manière suivante (problème surdéterminé) : trouver Ω de mesure 1 et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u = 2 & \text{dans } \Omega \\ \nabla u.\mathbf{n} = c & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}\right.$$

qui est un problème de frontière libre. En utilisant le principe du maximum, Serrin a montré [12, 13] que la seule solution (à bord régulier) est le cercle, résultat tout à fait conforme à l'intuition !

Bibliographie

[1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson.

[2] J. CEA, Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, *Volume 20 No 3 M.A.A.N.*

[3] G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland.

[4] P. GRISVARD, *Elliptic problems in Nonsmooth Domains*, Pitman.

[5] P. GUILLAUME, M. MASMOUDI, Computation of high order derivatives in optimal shape design, Numerische Mathematik, 67, 1994, 231-250.

[6] P. GUILLAUME, M. MASMOUDI, Solution to the time-harmonic Maxwell's equations in a waveguide, use of higher order derivatives for solving the discrete problem, to appear in SIAM Journal on Numerical Analysis.

[7] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.

[8] KENNAN T. SMITH, *Primer of modern analysis*, Springer Verlag.

[9] F. MURAT et J. SIMON, Sur le contrôle par un domaine géométrique, *Thèse d'état, Paris.*

[10] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson.

[11] B. ROUSSELET, Shape design sensitivity from partial differential equation to implementation, *Eng. Opt. 11, 151-171.*

[12] J. SERRIN, A symmetry problem in potential theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43 (1971), pp. 304-318.

[13] J. SERRIN, Optimal shapes for brittle beams under torsion (with H.F. Weinberger). In "Complex Analysis and its Applications", Steklov Institute (Acad. of Sciences) Jubilee Volume for I.Y. Vekua. Nauka Moscow 1978, pp. 88-91.

[14] V. STRASSEN, Algebraic complexity theory, in J. van Leeuwen (Editeur), *Handbook of Theoritical Computer Science, volume A : Algorithms and complexity,* Elsevier, Amsterdam.