Génie Mathématiqueet Modélisation
Troisième Année

# ANALYSE FONCTIONELLE

ET

# TRAITEMENT DU SIGNAL

A. BENDALI, PH. GUILLAUME, J.P. VILA

2001/2002

# Table des matières

# Chapitre 1

# Convolution des distributions

En théorie du signal, la convolution est à la base de la notion de filtrage. De ce point de vue, la propriété fondamentale de la convolution est de commuter avec les opérateurs de translation. En théorie des équations aux dérivées partielles, la convolution a des applications essentielles comme le calcul de la solution élémentaire d'une e.d.p.. De ce point de vue, la propriété fondamentale de la convolution est de commuter avec les opérateurs de dérivation. Ces deux propriétes sont équivalentes, et caractérisent l'opérateur de convolution.

Il y a plusieurs manières d'introduire le produit de convolution de deux distributions. On adopte ici celle qui utilise le produit tensoriel de deux distributions. Observons que l'on ne peut définir le produit de convolution que lorsque les deux fonctions ou distributions sont définies sur tout $\mathbb{R}^N$. C'est pourquoi dans la suite, pour alléger les notations, nous ne préciserons pas le domaine des espaces fonctionnels ou d'intégration lorsque ce dernier est égal à $\mathbb{R}^N$.

## 1.1 Produit tensoriel de deux distributions

### 1.1.1 Introduction

Rappelons comment a été définie la convolution de deux fonctions. Soient $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^1$. Sachant que

$$\begin{aligned}\int |f(x-y)|\,|g(y)|\;dydx &= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|\,dx\right) dy \\ &= \left(\int |g(y)|\,dy\right)\left(\int |f(z)|\,dz\right) < \infty\end{aligned}$$

le théorème de Tonnelli montre que $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est sommable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Le théorème de Fubini montre alors que la fonction

$$h(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

est définie p.p. et qu'elle est une fonction de $L^1$. C'est par définition la convolée, ou le produit de convolution, de $f$ et $g$, i.e.,

$$h = f * g.$$

Observons qu'on obtient immédiatement les propriétés suivantes :

– commutativité :

$$f * g = g * f,$$

– si $\tau_a$ désigne l'opérateur de translation : $\tau_a f(x) = f(x-a)$, alors

$$\tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g = f * (\tau_a g),$$

– si $f \in \mathcal{C}^n$ et si $\partial^\alpha f \in L^1$, $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq n$, alors $f * g \in \mathcal{C}^n$ et

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Rappelons que pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ et $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$.

On veut généraliser la définition précédente à deux distributions quelconques. Pour celà, examinons comment se comporte $h$ par composition avec une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$. On a

$$\langle h, \varphi \rangle = \int h(x)\varphi(x)\, dx$$

et une nouvelle fois par le théorème de Fubini

$$\langle h, \varphi \rangle = \int f(z-t)g(t)\varphi(z)\, dzdt.$$

Le changement de variable $x = z - t$, $y = t$, donne alors

$$\langle h, \varphi \rangle = \int f(x)g(y)\varphi(x+y)\, dxdy.$$

La fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est appelé produit tensoriel de la fonction $f$ et de la fonction $g$ et est notée

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y).$$

On a donc

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g(x, y), \varphi(x+y) \rangle. \tag{1.1}$$

Souvent, la fonction $f \otimes g$ est dite à variables séparées.

La formule (1.1) est à la base de la convolée de deux distributions. Plus précisément, si on réussit à définir le produit tensoriel $S \otimes T$ de deux distributions $S$ et $T$, on pourra définir le produit de convolution $S * T$ de $S$ et $T$ par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T(x,y), \varphi(x+y) \rangle$$

à chaque fois que le second membre a un sens pour tout $\varphi$ dans $\mathcal{D}$.

**Remarque 1.1** *C'est le comportement de $f$ et de $g$ à l'infini qui permet de définir $f * g$. De même que pour les fonctions, le produit de convolution n'aura pas de sens pour deux distributions quelconques. L'appartenance à $\mathrm{L}^1$ est une restriction sur le comportement à l'infini des fonctions qui permet de définir leur produit de convolution. L'analogue sur les distributions sera traduit par une restriction sur le support de $S$ et de $T$.*

### 1.1.2 Produit tensoriel de deux distributions

Pour définir $S \otimes T$, examinons d'abord le cas où $S$ et $T$ sont dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Les théorèmes de Tonnelli et de Fubini donnent là encore

$$\langle S \otimes T(x,y), u \otimes v(x,y) \rangle = \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{D},$$

et

$$\langle S \otimes T(x,y), \varphi(x,y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\right).$$

Dorénavant, nous noterons d'une façon abusive mais plus suggestive $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\right)$ par $\mathcal{D}_{xy}$ et $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\right)$ par $\mathcal{D}'_{xy}$. Les indices $x$ ou $y$ dans $\mathcal{D}_x$, $S_x$, $T_y \ldots$ , signaleront que la variable est $x$ ou $y$.

En généralisant les deux formules précédentes à deux distributions quelconques, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 1.1** *Pour tout $S_x \in \mathcal{D}'_x$ et tout $T_y \in \mathcal{D}'_y$, il existe une distribution $S_x \otimes T_y$ unique et bien déterminée par*

$$\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x,y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y) \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{xy}, \tag{1.2}$$

*vérifiant*

$$\langle S_x \otimes T_y, u \otimes v(x,y) \rangle = \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}. \tag{1.3}$$

*De plus, on a*

$$S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x.$$

*Preuve* - Clairement, cette distribution, si elle existe, est unique car la formule (1.2) donne la valeur de cette distribution sur toute fonction test. Nous nous limiterons ici à montrer que cette distribution est bien définie d'un point de vue algébrique. soit $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$. Pour tout $x$

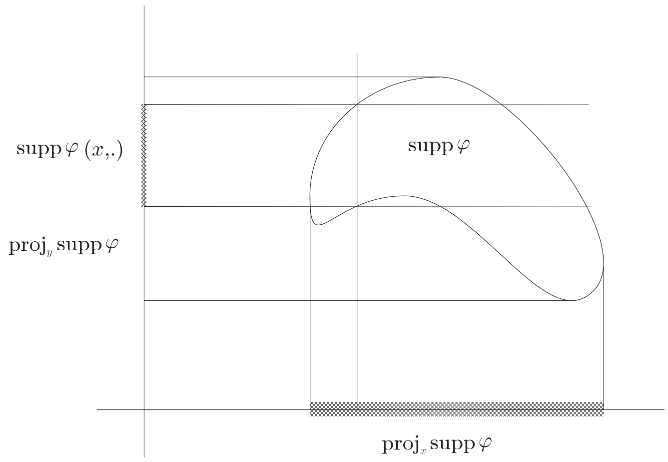



FIG. 1.1: *projections de* supp $\varphi$

fixé, la fonction $y \mapsto \varphi(x, y)$ est dans $\mathcal{D}_y$ et son support $\operatorname{supp}\varphi(x,\cdot)$ est un compact vérifiant (cf. fig. 1.1)

$$\operatorname{supp}\varphi(x,\cdot) \subset \operatorname{proj}_y \operatorname{supp}\varphi. \tag{1.4}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi(x+tz,\cdot) - \varphi(x,\cdot)\right) = \sum_{i=1}^{N} \partial_j \varphi(x,\cdot) z_j, \quad \text{dans } \mathcal{D}_y.$$

Il en résulte que la fonction $\theta$ définie par

$$\theta(x) = \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle$$

est indéfiniment dérivable. De plus, si on note

$$A = \operatorname{proj}_x \operatorname{supp}\varphi,$$

$A$ est un compact de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,\cdot) = 0$ si $x \notin A$. Il en résulte que $\theta \in \mathcal{D}_x$. En fait, on peut montrer que l'application $T_y \mapsto \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle$ est continue de $\mathcal{D}'_y$ dans $\mathcal{D}_x$. Ceci permet donc de définir $\langle S_x, \theta(x)\rangle$.

Si maintenant, $\varphi(x,y) = u(x)v(y)$, il vient

$$\theta(x) = \langle T, v\rangle\, u(x),$$

d'où la formule (1.3).

Finalement, on déduit de cette même formule que $S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x$ à partir de la propriété topologique suivante que nous admettrons : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$, il existe une suite de fonctions $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{D}_{xy}$ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi_n(x,y) = \sum_{i=1}^{\ell_n} u_{i,n}(x) v_{i,n}(y), \quad u_{i,n} \text{et } v_{i,n} \in \mathcal{D} \\ \lim \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{D}_{xy} \end{cases} \tag{1.5}$$

□

Pour $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^1 \cap \mathcal{C}^0$, on a directement

$$\mathrm{supp}\, f \otimes g = \mathrm{supp}\, f \times \mathrm{supp}\, g.$$

Le produit tensoriel de deux distributions possède la même propriété.

**Proposition 1.2** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\mathrm{supp}\, S_x \otimes T_y = \mathrm{supp}\, S_x \times \mathrm{supp}\, T_y. \tag{1.6}$$

*Preuve* - Considérons le cas suivant (cf. fig. 1.2)

$$\mathrm{proj}_y \mathrm{supp}\, \varphi \cap \mathrm{supp}\, T_y = \emptyset.$$

Il résulte de (1.4) que $\theta(x) = 0$ pour tout $x$, et donc $\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x,y) \rangle = 0$.

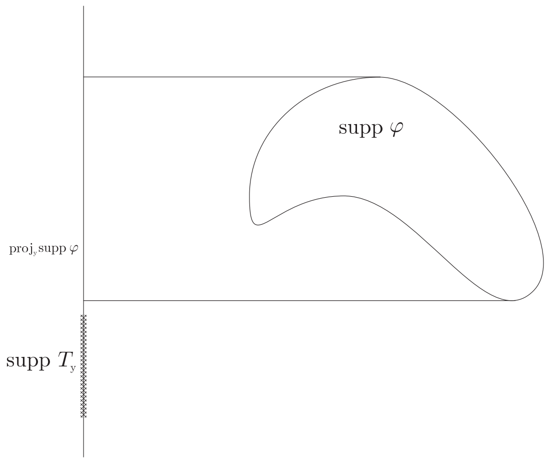



FIG. 1.2: *projection de supp $\varphi$*

De même, compte tenu de $S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x$, si

$$\mathrm{proj}_x \mathrm{supp}\, \varphi \cap \mathrm{supp}\, S_x = \emptyset,$$

alors $\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x,y) \rangle = \langle T_y \otimes S_x, \varphi(x,y) \rangle = 0$ d'après le cas précédent.

En regroupant ces deux cas, on peut affirmer que

$$\mathrm{supp}\, S_x \otimes T_y \subset \mathrm{supp}\, S_x \times \mathrm{supp}\, T_y.$$

La propriété (1.5) permet alors d'arriver à (1.6).

□

**Remarque 1.2** *On vérifie directement que le produit tensoriel est associatif. Ceci permet de définir par exemple $S \otimes T \otimes R$ par*

$$S \otimes T \otimes R = (S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R).$$

## 1.2 La convolution

### 1.2.1 Convolution de deux distributions

Soient $S$ et $T$ deux distributions sur $\mathbb{R}^N$. On définit, lorsqu'il existe, le produit de convolution $S * T$ comme la distribution donnée sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle. \tag{1.7}$$

Cette définition coïncide avec la définition usuelle lorsque $S_x = f(x)$ et $T_y = g(y)$ avec $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^1$. Nous verrons qu'elle coïncide également avec la définition de $\rho * T,\ \rho \in \mathcal{D}$, vue dans la première partie du cours d'analyse fonctionnelle.

Donnons auparavant un critère sur les supports de $S$ et $T$ qui permet d'être assuré que $S * T$ est bien une distribution. Nous aurons besoin des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ définis pour tout sous-ensemble $F$ de $\mathbb{R}^N$ par (cf. fig. 1.3)

$$F^\Delta := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;\ x+y \in F\right\}.$$

Clairement, pour $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$, on a

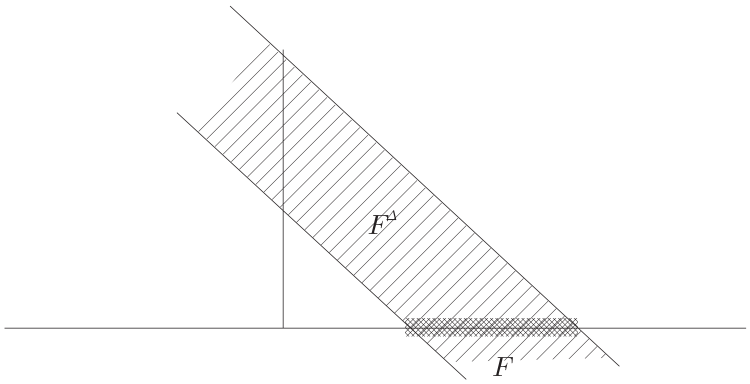



FIG. 1.3: *sous-ensemble $F^\Delta$*

$$\operatorname{supp} \varphi(x+y) = (\operatorname{supp} \varphi)^\Delta.$$

Comme $K^\Delta$ n'est pas compact même si $K$ est compact, $\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle$ peut ne pas être défini car la fonction $(x,y) \mapsto \varphi(x+y)$ n'est dans $\mathcal{D}_{xy}$ que si $\varphi$ est identiquement nul. Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Proposition 1.3** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^M$ et $W \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La distribution $W$ admet un prolongement et un seul sur l'espace*

$$\mathcal{C}^\infty_W := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} W \ \textit{est compact dans}\ \Omega\}.$$

*Preuve* - Pour $\varphi \in \mathcal{C}_W^\infty$, comme $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} W$ est compact dans $\Omega$, il existe $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\eta \equiv 1$ dans un voisinage compact $K$ de $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} W$. On peut définir alors

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle W, \eta\varphi \rangle \tag{1.8}$$

car $\eta\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Clairement, cette construction laisse inchangé $\langle W, \varphi\rangle$ lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ou si $\operatorname{supp} W$ est compact dans $\Omega$ en prenant $\eta \equiv 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp}\varphi$ ou de $\operatorname{supp} W$. Cela constitue bien un prolongement de la distribution $W$. On retrouve l'identification d'une distribution à support compact à une fonctionnelle sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

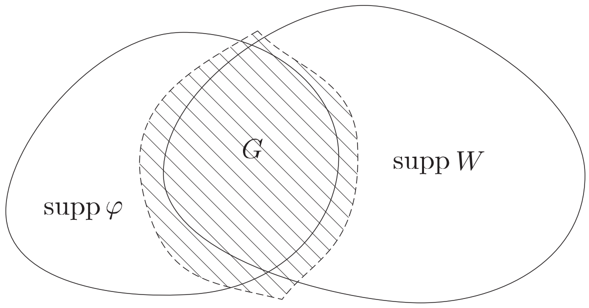



FIG. 1.4: *supports de $\varphi$ et $W$*

Il reste à montrer que la définition (1.8) ne dépend pas du choix de $\eta$. Soit $\xi \equiv 1$ dans un voisinage compact $G$ de $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} W$. Notons par $H = K \cap G$ ; $H$ est un voisinage compact de $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} W$. De plus, $\eta - \xi \equiv 0$ sur $H$. La fonction $(\eta - \xi)\varphi$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\operatorname{supp}(\eta - \xi)\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi \setminus H$ et donc (cf. fig. 1.4)

$$\operatorname{supp}(\eta - \xi)\varphi \cap \operatorname{supp} W = \emptyset.$$

Ceci montre que le prolongement de $W$ ne dépend pas de la fonction particulière $\eta$.

$\square$

On peut alors énoncer le critère suivant.

**Théorème 1.4** *Soient $S$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telles que*

$$(\operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T) \cap K^\Delta \text{ est compact, } \forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^N, \tag{1.9}$$

*alors, la formule (1.7) définit bien une distribution $S * T$. De plus, dans ce cas $T * S$ est aussi bien défini et*

$$T * S = S * T.$$

*Preuve* - Notons $W = S_x \otimes T_y$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. En posant $K = \operatorname{supp}\varphi$, on déduit de (1.9) que la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x + y) \in \mathcal{C}_W^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Il résulte de la proposition 1.3 que $\langle W, \varphi(x + y)\rangle$ est bien défini. Nous admettrons que l'application $\varphi \mapsto \langle W, \varphi(x + y)\rangle$ est bien une distribution.

Comme la propriété (1.9) est symétrique en $x$ et $y$, il est clair que $T * S$ est aussi défini. De plus $S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x$ (cf. proposition 1.1), d'où $T * S = S * T$.

$\square$

**Exemples**

1. Si $S$ est à support compact, ce que l'on note $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $S * T$ est défini pour tout $T \in \mathcal{D}'$. Autrement dit, *le produit de convolution est défini dès que l'un des facteurs est à support compact.* En effet, notons $A = \operatorname{supp} S$ et $B = \operatorname{supp} T$. Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^N$. Rappelons que

$$(A \times B) \cap K^\Delta = \{(x, y) \in A \times B;\ x + y \in K\}.$$

L'ensemble $(A \times B) \cap K^\Delta$ est fermé car si $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$ avec $x_n \in A$, $y_n \in B$ et $x_n + y_n \in K$ alors $x \in A$, $y \in B$ et $x + y \in K$ sachant que $A$, $B$ et $K$ sont fermés. Reste à montrer que $A \times B \cap K^\Delta$ est borné. Il suffit pour celà de remarquer que si $x$ et $z = x + y$ sont bornés, alors $y = z - x$ est aussi borné.

2. L'exemple suivant où $S = f \in \mathrm{L}^1$, $T = g \in \mathrm{L}^1$ montre que $S * T$ peut exister sans que la propriété (1.9) soit vérifiée. Comme nous l'avons signalé plus haut, dans ce cas c'est la restriction de la croissance de $f$ et de $g$ à l'infini traduite par l'appartenance à $\mathrm{L}^1$ qui assure l'existence du produit de convolution.

3. Soit $a \in \mathbb{R}^N$. Comme $\delta_a$ est à support compact, $\delta_a * T$ est défini pour tout $T \in \mathcal{D}'$. De plus, ici on peut calculer explicitement le produit de convolution

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_a \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle = \langle \delta_a, \langle T_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, \varphi(a + y) \rangle = \langle T_y, \tau_{-a} \varphi(y) \rangle \\ &= \langle \tau_a T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

i.e.,

$$\delta_a * T = \tau_a T, \quad \forall a \in \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

En particulier, on obtient *la propriété fondamentale*

$$\delta * T = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'. \tag{1.11}$$

On énonce cette propriété en disant que $\delta$ est l'**élément unité** du produit de convolution.

**Cas de la convolution $\mathcal{D} * \mathcal{D}'$**

Par construction même, la définition du produit de convolution de deux distributions coïncide avec la définition directe lorsque $S$ et $T$ sont dans $\mathrm{L}^1$. C'est également le cas lorsque $S = \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Rappelons que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on définit $\varphi_\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ par $\varphi_\sigma(x) = \varphi(-x)$.

**Théorème 1.5** *Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. La relation suivante*

$$\langle T * \rho, \varphi \rangle = \langle T, \rho_\sigma * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \tag{1.12}$$

*permet de définir une distribution $T * \rho$ qui coïncide avec le produit de convolution de $T$ et de $\rho$. La distribution $T * \rho$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ donnée par*

$$T * \rho(x) = \langle T_y, \rho(x - y) \rangle = \langle T, \tau_x(\rho_\sigma) \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.13}$$

*Preuve* - La seconde partie de la démonstration est une simple transposition du cas unidimensionnel. Montrons que la distribution définie par (1.12) coïncide avec le produit de convolution donné par (1.7). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\rho_\sigma * \varphi(x) = \int \varphi(x-z)\rho_\sigma(z)\,dz = \int \varphi(x-z)\rho(-z)\,dz.$$

Le changement de variable $y = -z$ donne alors

$$\rho_\sigma * \varphi(x) = \int \varphi(x+y)\rho(y)\,dy,$$

et ainsi,

$$\langle T_x, \rho_\sigma * \varphi(x)\rangle = \langle T_x, \langle \rho(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T * \rho, \varphi\rangle.$$

□

**Remarque 1.3** *Nous avons montré que les différentes définitions du produit de convolution $S * T$ coïncident lorsque $(S,T)$ appartient à l'intersection des différents domaines de ces définitions. A chaque fois, le produit de convolution $S * T$ a pu être défini lorsqu'une restriction convenable sur le comportement de $S$ à l'infini permettait de relaxer la restriction correspondante sur celui de $T$. Dans cette direction, on pourrait définir également $T * \rho$ par la formule (1.13) pour $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.*

### 1.2.2 Propriétés de base du produit de convolution

La propriété fondamentale de l'opérateur de convolution est de commuter aussi bien avec l'opérateur de dérivation que l'opérateur de translation. Ceci s'explique par le fait que

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-h}\varphi(x) - \varphi(x)}{h},$$

formule qui se généralise au cas $\mathbb{R}^N$.

**Théorème 1.6** *Soient $S$ et $T$ vérifiant la condition (1.9). Alors, pour tout multi-indice $\alpha$, on a*

$$\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * \partial^\alpha T. \tag{1.14}$$

*Preuve* - Il suffit de montrer la propriété pour $\partial^\alpha = \partial_i = \partial/\partial_{x_i}$. Comme $\operatorname{supp} \partial_i S \subset \operatorname{supp} S$ et $\operatorname{supp} \partial_i T \subset \operatorname{supp} T$ , les trois termes de (1.14) sont définis. Pour $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \partial_i(S*T), \varphi\rangle &= -\langle S*T, \partial_i\varphi\rangle = -\langle S_x \otimes T_y, \partial_i\varphi(x+y)\rangle \\ &= -\langle S_x\langle T_y, \partial_i\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle S_x\langle \partial_i T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle S * \partial_i T, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\partial_i(S*T) = S*\partial_i T$. Comme $S*T = T*S$, on a aussi $\partial_i(S*T) = \partial_i(T*S) = T*\partial_i S = (\partial_i S)*T$.

$\square$

**Remarque 1.4** *1. Il est important que $S$ et $T$ vérifient la condition (1.9) pour que la formule soit vraie. Si $f \in \mathrm{L}^1$, $g \in \mathrm{L}^1$, $f*g$ est défini mais $\partial^\alpha(f*g)$ n'est pas forcément égal à $(\partial^\alpha f)*g$ ou à $f*\partial^\alpha g$ car ces deux derniers termes peuvent ne pas être définis.*
*2. L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas définir $S*T$ sans condition sur $S$ et sur $T$ tout en préservant la propriété ( 1.14). Pour $N=1$, $S=H$, la fonction de Heaviside et $T=1$, on a $H'*1 = \delta*1 = 1$ et $H*1' = 0$.*

En utilisant les quotients différentiels, le résultat du théorème 1.6 précédent s'explique par la propriété suivante.

**Proposition 1.7** *Si le produit de convolution $S*T$ de $S$ et de $T$ dans $\mathcal{D}'$ est bien défini par (1.7), alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$\tau_a(S*T) = (\tau_a S)*T = S*\tau_a T. \tag{1.15}$$

*Preuve* - Il suffit de remarquer que les trois termes de (1.15) sont définis, que

$$\begin{aligned}\langle \tau_a(S*T), \varphi\rangle &= \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y+a)\rangle\rangle = \langle S_x, \langle \tau_a T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle S*\tau_a T, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

puis d'utiliser la commutativité de la convolution.

$\square$

**Remarque 1.5** *Utilisant la relation $\tau_a\delta = \delta_a$, on peut retrouver la propriété (1.10) à partir de (1.11) par*

$$\delta_a * T = (\tau_a\delta)*T = \tau_a(\delta*T) = \tau_a T.$$

**Théorème 1.8** *Soient deux suites $\{S^n\}_{n\geq 0}$ et $\{T^n\}_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{D}'$ vérifiant*

$$\lim S^n = S \ \textit{et} \ \lim T^n = T \ \textit{dans} \ \mathcal{D}',$$

*il existe deux sous-ensembles $A$ et $B$, fermés dans $\mathbb{R}^N$ vérifiant la condition (1.9) tels que*

$$\operatorname{supp} S^n \subset A \ \textit{et} \ \operatorname{supp} T^n \subset B, \ \forall n \geq 0.$$

*Alors,*

$$\lim S^n * T^n = S*T, \quad \textit{dans} \ \mathcal{D}'.$$

*Preuve* - Nous admettrons que

$$\lim S_x^n \otimes T_y^n = S_x \otimes T_y, \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{xy},$$

conséquence de la continuité de l'application $T_y \mapsto \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle$ de $\mathcal{D}'_y$ dans $\mathcal{D}_x$. Soit $\varphi$ dans $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Appelons $K = \operatorname{supp}\varphi$. Comme $A \times B \cap K^\Delta$ est compact, il existe $\theta \in \mathcal{D}_{xy}$ tel que $\theta \equiv 1$ au voisinage de $A \times B \cap K^\Delta$. Il s'ensuit que

$$\langle S^n * T^n, \varphi\rangle = \langle S_x^n \otimes T_y^n, \varphi(x+y)\rangle = \langle S_x^n \otimes T_y^n, \theta(x,y)\varphi(x+y)\rangle.$$

D'où le résultat sachant que $\theta(x,y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}_{xy}$.

□

**Corollaire 1.9** *$\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$.*

*Preuve* - Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ une unité approchée, i.e. une suite de fonctions de la forme

$$h_n(x) = n^N h(nx), \quad n \geq 1,$$

avec $h \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} h \subset [-1,1]^N$, $h \geq 0$ et $\int h(x)dx = 1$. On a $\lim_{n\to\infty} h_n = \delta$ dans $\mathcal{D}'$. Comme $\operatorname{supp}\, h_n \subset [-1,1]^N$ qui est compact, on déduit de la proposition précédente que pour $T \in \mathcal{D}'$ on a

$$\lim_{n\to\infty} h_n * T = \delta * T = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'. \tag{1.16}$$

Prenons maintenant une fonction $g \in \mathcal{D}$ telle que $g(x) = 1$ si $||x|| \leq 1$. Soit $\rho_n(x) = g(x/n)(h_n * T)(x)$. On a $\rho_n \in \mathcal{D}$, et

$$\langle \rho_n, \varphi\rangle = \langle h_n * T, \varphi\rangle, \quad \text{dès que } B(0,n) \supset \operatorname{supp}\varphi.$$

Compte tenu (1.16), ceci prouve que

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

□

**Théorème 1.10** *Soient $S$ et $T$ dans $\mathcal{D}'$ telles que* $\operatorname{supp} S$ *et* $\operatorname{supp} T$ *vérifient la condition (1.9). Alors,*

$$\operatorname{supp} S * T \subset \overline{\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T}, \tag{1.17}$$

*où le second membre indique l'adhérence de* $\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$.

*Preuve* - Soit $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T} = \emptyset$. Comme ces deux ensembles sont fermés et que l'un d'eux est compact, ceci entraîne que leur distance est strictement positive :

$$d := \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi,\ \overline{\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T}) > 0.$$

Donc si $\varphi(x+y) \neq 0$ et $(x', y') \in \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T$, alors

$$|x - x'| + |y - y'| \geq |x + y - (x' + y')| \geq d,$$

ce qui prouve que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi(x+y),\ \operatorname{supp} S \otimes \operatorname{supp} T) > 0$. On a donc $\operatorname{supp} \varphi(x+y) \cap \operatorname{supp} S_x \otimes T_y = \emptyset$, d'où

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle = 0.$$

□

Il reste à examiner les propriétés d'associativité du produit de convolution. La difficulté vient de ce que $S * T$ peut ne pas être convolable avec $R$ bien que chacun des termes $S * T$, $T * R$ et $S * R$ existe. Là aussi, la réponse est donnée en examinant le cas de $n$ fonctions $\{f_i\}_{i=1}^n$ avec $f_i \in \mathrm{L}^1$ pour $i = 1 \ldots, n$. En procédant comme pour le produit de convolution de deux fonctions, on obtient par application itérée du théorème de Fubini que $f_1 * f_2 * \cdots * f_n$ est défini presque partout, qu'on peut le calculer par associativité en effectuant à chaque fois la convolée de deux fonctions de $\mathrm{L}^1$ et qu'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle f_1 * \cdots * f_n, \varphi \rangle = \langle f_1(x^{(1)}) \otimes \cdots \otimes f_n(x^{(n)}), \varphi(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}) \rangle.$$

En suivant une démarche analogue à celle ayant servi à définir $S * T$, on aurait alors le théorème suivant.

**Théorème 1.11** *Soient $\{S_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{D}'$. Si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$*

$$\operatorname{supp} S_1 \times \cdots \times \operatorname{supp} S_n \cap K_n^\Delta \text{ est compact,}$$

*où*

$$K_n^\Delta := \left\{ \left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right) \in \left(\mathbb{R}^N\right)^n ;\ x^{(1)} + \cdots + x^{(n)} \in K \right\},$$

*alors, on peut définir $S_1 * \cdots * S_n$ par*

$$\langle S_1 * \cdots * S_n, \varphi \rangle = \langle S_1 \otimes \cdots \otimes S_n, \varphi(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

*De plus, on peut calculer $S_1 * \cdots * S_n$ par associativité en effectuant à chaque fois un produit de deux convolutions.*

## 1.3 Quelques applications de la convolution

### 1.3.1 Solutions élémentaires

Soit

$$p(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^N$, à coefficients $a_\alpha$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si les coefficients $a_\alpha$ sont des constantes par rapport à la variable $x$, on dit que l'opérateur est à coefficients constants et on note plutôt

$$p(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Une distribution $E \in \mathcal{D}'$ est dite *solution élémentaire* de $p(x, \partial)$ si elle vérifie

$$p(x, \partial)E = \delta, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Observons qu'une solution élémentaire, si elle existe, n'est pas unique. En lui ajoutant une solution quelconque de l'équation homogène

$$p(x, \partial)u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

on obtient encore une solution élémentaire. Il faut imposer une autre condition pour carctériser l'une des solutions élémentaires.

Un opérateur différentiel à coefficients variables quelconque n'admet pas toujours de solution élémentaire. Un résultat profond et difficile de Malgrange et Ehrenpreis établit cependant :

**Théorème 1.12** *Tout opérateur différentiel à coefficients constants $p(\partial)$ sur $\mathbb{R}^N$ possède une solution élémentaire $E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

La solution élémentaire est utilisée pour "calculer" la solution de certaines équations aux dérivées partielles de la façon suivante.

**Théorème 1.13** *Soit un opérateur différentiel à coefficients constants $p(\partial)$ sur $\mathbb{R}^N$ et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ une solution élémentaire de $p(\partial)$. Alors, pour toute distribution $f$ à support compact sur $\mathbb{R}^N$ (i.e., $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$), l'équation*

$$p(\partial)u = f \tag{1.18}$$

*possède (au moins) une solution $u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ donnée par*

$$u = E * f. \tag{1.19}$$

*Preuve* - Comme $f$ est à support compact, la formule (1.19) permet de définir $u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. On a alors sachant que $p(\partial)$ est à coefficients constants

$$p(\partial)u = p(\partial)\,(E * f) = (p(\partial)E) * f = \delta * f = f.$$

□

### 1.3.2 Calcul symbolique de Heaviside

L'ingénieur Heaviside a développé un calcul symbolique qui permet de calculer d'une façon heuristique la solution d'une équation différentielle quelconque à coefficients constants. La théorie des distributions permet de justifier ce procédé et de comprendre comment il opère.

On part de la propriété suivante.

**Théorème 1.14** *Notons par $\mathcal{D}'_+$ le sous-espace des distributions $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que*

$$\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\,.$$

*Le sous-espace $\mathcal{D}'_+$ est une algèbre pour la convolution, ayant pour élément unité $\delta$.*

*Preuve* - La seule propriété non évidente est d'établir que la convolution opère de $\mathcal{D}'_+ \times \mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$. Soit $K$ un compact $\mathbb{R}$. Il existe donc $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$K \subset [a, b]\,.$$

Notons d'abord que

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cap K^\Delta \subset \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } a \leq x + y \leq b\right\}.$$

Clairement, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cap K^\Delta = \emptyset$ si $b < 0$, et est contenu dans le triangle du plan de sommets $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,b)$ si $b > 0$. Il en résulte, suite à la propriété (1.9) que deux éléments quelconques $S$ et $T$ dans $\mathcal{D}'_+$ sont convolables. On montrerait de même que le produit de convolution de $n$ éléments $\{S_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{D}'_+$ existe, et donc que le produit de convolution est associatif sur $\mathcal{D}'_+$. Il reste à montrer que $S * T \in \mathcal{D}'_+$. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème 1.10 :

$$\operatorname{supp} S * T \subset \overline{\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T} \subset \overline{\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+.$$

□

Un élément $S$ de $\mathcal{D}'_+$ sera dit inversible s'il existe $V \in \mathcal{D}'_+$ tel que

$$S * V = \delta.$$

On note, d'une façon plus commode $V = S^{*-1}$, et on a directement si $U$ et $V$ sont inversibles dans $\mathcal{D}'_+$

$$(U * V)^{*-1} = V^{*-1} * U^{*-1}.$$

On se donne dans toute la suite un opérateur à coefficients constants sur $\mathbb{R}$

$$p(\partial_x) = \partial_x^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \partial_x^j. \tag{1.20}$$

D'une façon canonique, on associe à cet opérateur un polynôme de degré $m$

$$p(r) = r^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j r^j,$$

appelé parfois polynôme caractéristique.

Soient $f$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $u_0, \cdots, u_{m-1}$ dans $\mathbb{R}$ (mais, on pourrait considérer, sans aucune difficulté supplémentaire, le cas où $f$ est à valeurs complexes et $u_0, \cdots, u_{m-1}$ dans $\mathbb{C}$). La théorie des équations différentielles ordinaires montre alors que l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} p(\partial_x)u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \cdots, \ u^{(m-1)}(0) = u_{m-1}, \end{array} \right. \tag{1.21}$$

possède une solution et une seule dans $\mathcal{C}^m(\mathbb{R})$.

On va voir comment la convolution dans $\mathcal{D}'_+$ va fournir un procédé systématique de calcul quasiment algébrique de cette solution sur $\mathbb{R}_+$.

Observons tout d'abord que la détermination de $u$ sur $\mathbb{R}_+$ équivaut à celle de la distribution $U = Hu$ dans $\mathcal{D}'_+$ où $H$ est précisément la fonction de Heaviside, définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ sinon.

La formule des sauts donne par récurrence les différentes dérivées de $U$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, en notant $u^{(j)}$ la dérivée au sens usuel de $u$ d'ordre $j$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = Hu \\ U' = Hu' + u_0\delta \\ U'' = Hu'' + u_1\delta + u_0\delta' \\ U^{(j)} = Hu^{(j)} + u_{j-1}\delta + u_{j-2}\delta' + \cdots + u_0\delta^{(j-1)}, \ j = 0\ldots, m. \end{array} \right.$$

Il en résulte que $U$ vérifie l'équation différentielle

$$p(\partial_x)U = Hf + T, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

où $T$ est la distribution sur $\mathbb{R}$ donnée par la combinaison suivante des dérivées de $\delta$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \delta^{(i)} \\ \alpha_0 = u_{m-1} + a_{m-1}u_{m-2} + \cdots + a_1 u_0, \\ \alpha_1 = u_{m-2} + a_{m-1}u_{m-3} + \cdots + a_2 u_0, \\ \alpha_i = u_{m-i-1} + a_{m-1}u_{m-i-2} + \cdots + a_{i+1}u_0, \\ \alpha_{m-1} = u_0. \end{array} \right.$$

Dans le cas unidimensionnel, on obtient une démonstration élémentaire du théorème 1.12 en prenant pour $E$ la solution $U$ qui correspond aux données

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ u_0 = \cdots = u_{m-2} = 0, \quad u_{m-1} = 1. \end{array} \right.$$

Résumons ce dernier résultat dans le théorème suivant.

**Théorème 1.15** *Tout opérateur différentiel à coefficients constants (1.20) possède une solution élémentaire $E$ dans $\mathcal{D}'_+$ donnée par*

$$E = Hv$$

*où $v$ est la solution de l'équation différentielle avec conditions initiales*

$$\begin{cases} p(\partial_x)v = 0, & \text{dans } \mathbb{R}, \\ v(0) = \cdots = v^{(m-2)}(0) = 0, \ v^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

*De plus, $E$ est l'inverse dans $\mathcal{D}'_+$ de*

$$p(\partial_x)\delta = \delta^{(m)} + a_{m-1}\delta^{(m-1)} + \cdots + a_0\delta.$$

*Preuve* - Il reste à montrer la seconde partie du théorème. Partant de

$$p(\partial_x)E = \delta,$$

on a

$$E * p(\partial_x)\delta = (p(\partial_x)E) * \delta = \delta * \delta = \delta.$$

□

Le théorème 1.15 induit deux procédés pour la résolution du problème différentiel à condition initiale (1.21). Le premier résulte de ce que la solution $u$ du problème différentiel est donnée par la convolution suivante :

$$u(x) = (E * (Hf + T))(x), \quad \forall x > 0.$$

Le second tient au fait que la solution élémentaire $E$ est donnée par l'inverse de $p(\partial_x)\delta$ et que la détermination de cet inverse est ramenée à une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $1/p(r)$. Plus précisément, on a :

**Théorème 1.16** *Soient $z_1, \cdots, z_n$ les racines distinctes d'ordre de multiplicité respectifs $\ell_1, \cdots, \ell_n$ du polynôme caractéristique $p(r)$ associé à l'opérateur différentiel à coefficients constants $p(\partial_x)$. La solution élémentaire $E$ de $p(\partial_x)$ dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$E = H \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell_i} c_{i,j} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e^{z_i x}, \tag{1.22}$$

*où les coefficients sont donnés par la décomposition en éléments simples*

$$\frac{1}{(r-z_1)^{\ell_1} \cdots (r-z_n)^{\ell_n}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell_i} \frac{c_{i,j}}{(r-z_i)^j}. \tag{1.23}$$

*Preuve* - Le point clé est de remarquer qu'en utilisant les relations

$$\delta^{(i)} * \delta^{(j)} = \delta^{(i+j)}, \quad (\delta')^{*0} = \delta,$$

on peut manipuler, comme un polynôme, $p(\partial_x)\delta = p(\delta')$, avec donc,

$$p(\delta') = (\delta')^{*m} + a_{m-1}(\delta')^{*(m-1)} + \cdots + a_1(\delta')^{*1} + a_0(\delta')^{*0}$$

pour le produit de convolution et son inverse comme une fraction rationnelle. On peut donc écrire d'abord

$$p(\delta') = (\delta' - z_1\delta)^{*\ell_1} * \cdots * (\delta' - z_i\delta)^{*\ell_i},$$

puis, en utilisant la décomposition en éléments simples (1.23)

$$E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i} c_{i,j}(\delta' - z_i\delta)^{*-j}.$$

Il suffit alors de remarquer que $V = (\delta' - z_i\delta)^{*-j}$ est l'inverse de $(\delta' - z_i\delta)^{*j}$ et que le théorème 1.15 donne $V = Hv$ où $v$ est la solution du problème différentiel à condition initiale

$$\begin{cases} (\partial_x - z_i)^j v = 0, \\ v^{(k)}(0) = 0;\ k \leq j-2, \quad v^{(j-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

D'où le résultat.

□

La résolution est donc donnée "explicitement" par les formules établies dans la proposition suivante.

**Proposition 1.17** *Si $E = H(x)x^j e^{zx}$, alors*

$$\left(E * \delta^{(i)}\right)(x) = \left(x^j e^{zx}\right)^{(i)}, \quad \forall x > 0.$$

*La fonction $v(x) = (E * Hf)(x)$, $x > 0$ est donnée par*

$$v(x) = \int_0^x y^j e^{zy} f(x-y)\, dy.$$

*Preuve* - La première formule est immédiate en utilisant les propriétés du produit de convolution et le fait que $H(x)x^j e^{zx}$ est régulière sur $]0, +\infty[$. Pour établir la seconde, il suffit de remarquer que pour deux fonctions $u$ et $v$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle Hu * Hv, \varphi\rangle = \int (Hu)(z)(Hv)(y)\varphi(y+z)\, dz dy.$$

En effectuant le changement de variable en $z$ donné par $z + y = x$, il vient

$$\langle Hu * Hv, \varphi\rangle = \int (Hu)(x-y)(Hv)(y)\varphi(x)\, dx dy.$$

Le théorème de Fubini donne alors que

$$Hu * Hv(x) = H(x)\int_0^x u(x-y)v(y)\, dy.$$

□

# Chapitre 2

# Signaux et filtres

La notion de filtrage est fondamentale en théorie du signal. Elle concerne toutes les transformations de signaux qui sont à la fois linéaires et invariantes par translation du temps. Nous allons retrouver la convolution étudiée dans le chapitre précédent, puisqu'il se trouve que les filtres sont en fait des systèmes de convolution.

## 2.1 Signaux

Physiquement, un signal est une quantité observable qui dépend d'un paramètre, en général le temps.
Exemples : son, image, intensité d'un courant, potentiel électrique, position d'un mobile, ...
Mathématiquement, on distinguera :
- les signaux dits "à temps continu" $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, où $x$ est une fonction, ou plus généralement une distribution,
- les signaux discrets $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui proviennent souvent de la discrétisation de signaux à temps continu (échantillonnage).
Exemples :
- signal sinusoïdal (dit aussi monochromatique) :

$$x(t) = \gamma \cos(\omega t + \varphi)$$

- échelon unité de Heaviside, désormais noté $u$ plutôt que $H$ pour ne pas le confondre avec les fonctions de transfert qui sont notées traditionellement $H$ :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- sinus cardinal :

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

- sinus intégral :

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(s)}{s}\, ds$$

- signal rectangulaire :

$$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

- impulsion de Dirac au point $a$ :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

- peigne de Dirac $\Delta_a$ : c'est la distribution définie par

$$\langle \Delta_a, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

## 2.2 Systèmes

Physiquement, un système est un objet, un appareil, qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$.
Exemples : amplificateur, télévision, robot, ...
Mathématiquement, c'est un opérateur $A$ qui transforme un signal d'entrée $x = x(t)$ en un signal de sortie $y = y(t)$ :

$$y = Ax$$

Exemples :
- amplificateur : $y(t) = ax(t), \qquad a \in \mathbb{R}$
- quadrateur : $y(t) = x^2(t)$,
- ligne à retard : $y(t) = \tau_a x(t) := x(t-a), \qquad a \in \mathbb{R}$
- inversion du temps : $y(t) = \check{x}(t) := x(-t)$ (noté aussi $x_\sigma(t)$),
- dérivateur : $y(t) = x'(t)$,
- intégrateur : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\, ds$,
- équation différentielle : $y'(t) + ay(t) = bx(t)$,
- équation récurrente : $y_k + ay_{k-1} = bx_k$,
- décimation : $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \longmapsto (x_0, x_2, x_4, \dots)$,
- interpolation : $(x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$.

## 2.3 Filtres

Soit un système :

$$\begin{aligned} A \;:\; X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = Ax \end{aligned}$$

où $X$ et $Y$ sont des espaces de fonctions (ou de distributions) munis d'une topologie. On supposera en général que $X$ et $Y$ sont inclus dans $\mathcal{D}'$, que $\delta \in X$, et que $X$ et $Y$ sont invariants par translation : $\tau_a x \in X$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in X$, même propriété pour $Y$.

**Définition 2.1** *Le système est dit :*
*- linéaire si pour tous signaux $x_1$ et $x_2 \in X$, on a*

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \quad \forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

*- réalisable (ou causal) si la condition $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t < \tau$ entraîne $y_1(t) = y_2(t)$ pour $t < \tau$ (avec $y_i = Ax_i,\ i = 1, 2$) pour tous $t,\ \tau \in \mathbb{R}$,*
*- invariant si une translation du temps sur l'entrée entraîne la même translation sur la sortie :*

$$A(\tau_a x) = \tau_a(Ax) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X,$$

*- continu si la condition de convergence $x_n \to x$ dans $X$ entraîne $Ax_n \to Ax$ dans $Y$.*

Selon que l'on a à faire à des signaux à temps continu ou discrets, on parlera de filtres à temps continu ou de filtres discrets.

**Définition 2.2** *Un système qui est à la fois linéaire, invariant et continu est appelé un filtre.*

### Réponse impulsionnelle

**Définition 2.3** *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un filtre. On appelle réponse impulsionnelle du filtre $A$ la réponse du filtre à l'impulsion de Dirac. On la note en général $h$ :*

$$h := A\delta.$$

Rappelons que $\mathcal{E}'$ est le sous espace de $\mathcal{D}'$ formé des distributions à support compact, et $\mathcal{D}'_+$ le sous espace des distributions à support contenu dans $\mathbb{R}^+$.

**Théorème 2.4** *(Théorème des filtres)*
*i) Soit $h$ une distribution à support compact ($h \in \mathcal{E}'$). Alors le système*

$$\begin{aligned} A\ :\ &\mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}' \\ &x \longmapsto Ax = h * x \end{aligned}$$

*est un filtre.*
*ii) Réciproquement, soit $A : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ un filtre, et $h$ la réponse impulsionnelle du filtre. Alors $h \in \mathcal{E}'$ et on a*

$$Ax = h * x \quad \forall x \in \mathcal{D}'.$$

*Cet énoncé est également vrai :*
*- avec $h \in \mathcal{D}'$ et $A : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{D}'$*
*- en remplaçant $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}'$ par $\mathcal{D}'_+$.*
*("les filtres sont des systèmes de convolution").*

### Fonction de transfert d'un filtre

Soit $A : X \longrightarrow Y$ un filtre. On suppose que l'espace $X$ contient les signaux monochromatiques $e_\lambda(t) := \exp(2i\pi\lambda t)$, $\lambda$, $t \in \mathbb{R}$.

**Proposition 2.5** *Tout signal monochromatique $e_\lambda$ est un vecteur propre du filtre $A$, i.e. il existe un nombre complexe $H(\lambda)$ tel que*

$$Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda.$$

*La fonction $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée fonction de transfert du filtre $A$.*

# Chapitre 3

# Eléments d'Analyse Hilbertienne

## 3.1 Notions de bases sur les Banachs

### 3.1.1 Rappels de topologie

#### Espace métrique E

**Définition 3.1** *Soit $E$ un espace métrique muni d'une distance d(x,y) . On note $B(a,r)$ la boule fermée de centre $a$ définie par:*

$$B(a,r) = \{x \in E, d(a,x) \leq r\}$$

*On note $\overset{o}{B}(a,r)$ la boule ouverte de centre $a$ définie par:*

$$\overset{o}{B}(a,r) = \{x \in E, d(a,x) < r\}$$

#### Espace topologique

On ne peut pas toujours définir une distance sur un espace topologique (ex: espace des distributions).

**Définition 3.2** ***Ouverts.*** *$O$ est une famille d'ouverts sur $E$ si et seulement si $\emptyset \subset O$, $E \subset O$, l'intersection d'un nombre finis d'ouvert est un ouvert et la réunion d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.*

**Définition 3.3** ***Fermés.*** *Un fermé est le complémentaire d'un ouvert.*

**Définition 3.4** ***Voisinage V.*** *Soit $x \in E$, $A$ une partie de $E$ est un voisinage de $x$ s'il existe un ouvert $O$ tel que $x \in O \subset A$. On désigne par $V(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.*

**Définition 3.5** ***Intérieur.*** *L'intérieur $\overset{o}{A}$ de $A$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$:*

$$\overset{o}{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset A} O$$

***Remarque 3.1 Fermeture.*** *La fermeture $\overline{A}$ fermeture de $A$ est le plus petit fermé contenant $A$:*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \; ferme \; / \; A \subset F} F$$

**Remarque 3.2** *$A$ ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{o}{A}$*

**Théorème 3.6** *$A$ fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow$ Toute limite de points de $A \in A$*

**Définition 3.7** ***Densité.*** *$A$ est dense dans $E$ si $\overline{A} = E$*

**Définition 3.8** ***Espace séparable.*** *$E$ est séparable s'il existe une partie dénombrable dense dans $E$.*

***Remarque 3.3*** *Si $f : E \to F$ alors :*

$f$ continue $\Leftrightarrow \forall \; O_F \;, \; f^{-1} \; ( \; O_F \; ) \subset O_E$
$f$ homéomorphisme de $E$ dans $F \Leftrightarrow f$ bijective et $f$, $f^{-1}$ continues.

**Définition 3.9** ***Suite de Cauchy dans un métrique.*** *La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy ssi $\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$*

**Remarque 3.4** *Une suite convergente est de Cauchy, mais une suite de Cauchy n'est pas forcément convergente.*

**Théorème 3.10** *$E$ est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.*

### 3.1.2 Notion d'espace de Banach

#### Espace vectoriel normé

E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou eventuellement sur $\mathbb{C}$ )

**Définition 3.11** *$p$ est une semi-norme si et seulement si :*

(i) $p : E \to \mathbb{R}^+$
(ii) $\forall v \in E, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda v) = |\lambda| \, p(v)$
(iii) $\forall (u, v) \in E, \quad p(u+v) \leq p(u) + p(v)$

**Définition 3.12** *$p$ est une norme si et seulement si $p$ est une semi-norme et $p(u) = 0$ entraîne $u = 0$.*

### Espace de Banach

**Définition 3.13** *Un Banach $E$ est un espace vectoriel normé complet.*

**Exemples**

- $\mathbb{R}$
- $C([a,b])$ avec $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
- $1 \leq p < \infty$

$$l^p = \{(a_p)_{p\in N}; \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p < \infty\} \qquad \|a\|_p = (\sum |a|^p)^{1/p}$$

pour $p = \infty$ $\qquad \|a\|_\infty = \sup_p |a_p|$

**Lemme 3.14** *Si $\alpha, \beta > 0$ et $p > 1$, alors pour tout $p, p'$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ on a :*

$$\alpha\beta < \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^p}{p'}$$

**Lemme 3.15** ***Inégalité de Hölder.*** *Si $1 \leq p \leq \infty$ et $a \in l^p$, $b \in l^{p'}$,alors:*

$$\sum |a_k b_k| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'}$$

**Lemme 3.16** ***Inégalité de Minkowski.*** *Si a,b $\in l^p$, on a :*

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

**Proposition 3.17** *Quelque soit $p$ tel que $1 \leq p \leq \infty$, $l^p$ est complet.*

### Opérateur borné, dualité

**Définition 3.18** ***Opérateur borné.*** *Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels normés, un opérateur borné $u$ est une application linéaire continue de $E$ dans $F$. L'espace correspondant est noté $L(E,F)$ ($u \in L(E,F)$), on note également $L(E,E) \equiv L(E)$.*

**Théorème 3.19** *Soient E,F deux espaces vectoriels normés, $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $\exists c > 0, \ \forall x \in E, \qquad \|u(x)\|_F \leq c\|x\|_E$

*(ii)* *u est lipchitzienne*
$\exists k > 0, \qquad \|u(x) - u(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$

*(iii)* *u est uniformément continue*
$\forall \epsilon > 0, \ \forall (x,y) \in E, \ \exists \eta > 0 \qquad \|x - y\|_E < \eta \Rightarrow \|u(x) - u(y)\|_F \leq \epsilon$

*(iv) u est continue*

*(v) u est continue en 0*

*Preuve* - On se limite à $(v) \Rightarrow (i)$, le reste étant classique. Par définition,

$$(v) \Leftrightarrow \forall \epsilon, \exists \eta > 0; \|x\| < \eta \Rightarrow \|u(x)\| < \epsilon$$

Soit $x$ quelconque dans $E$, si on pose $y = \frac{x}{\|x\|}\frac{\eta}{2}$, on a $\|y\| = \frac{\eta}{2} \Rightarrow \|u\| < \epsilon$.

Par suite $\|u(x)\| < \frac{2\epsilon}{\eta}\|x\|$ , c'est-à-dire $(i)$ avec $c = \frac{2\epsilon}{\eta}$.

□

**Théorème 3.20** *Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels normés avec $F$ Banach, alors $L(E, F)$ est un Banach. En particulier, $E'$ dual topologique de $E$ ($E' = L(E, \mathbb{R})$) est toujours un Banach.*

*Preuve* - Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy dans $L(E, F)$, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in N, n, m > N(\epsilon), \|u_n - u_m\|_L < \epsilon$$

et donc, $\forall x \in E$ fixé, $(u_n(x))_{n \in N}$ est de Cauchy dans F, donc converge.
Soit $u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$, $x \to u(x)$ est trivialement linéaire :

$$u_n(\lambda x + y) = \lambda u_n(x) + u_n(y) \to \lambda u(x) + u(y)$$

Elle est continue car $\forall n > N(\epsilon), \|u_n(x) - u(x)\|_F \leq \epsilon\|x\|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u(x)\|_F &\leq \|u_{N+1}(x) - u(x)\|_F + \|u_{N+1}(x)\|_F \\ &\leq \epsilon\|x\|_E + \|u_{N+1}\|_L\|x\| \\ &\leq (\epsilon + \|u_{N+1}\|_L)\|x\| \end{aligned}$$

et donc $u$ est continue d'après le Théorème 3.19

□

**Théorème 3.21** ***Prolongement.*** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés avec $F$ Banach, $E_o$ un espace vectoriel dense dans $E$ et $u_o \in L(E_o, F)$. Alors $u_o$ se prolonge de manière unique en $u \in L(E, F)$ et $\|u\|_{L(E_o,F)} = \|u\|_{L(E,F)}$ ; en particulier on a $E'_o = E''$.*

*Preuve* - **Unicité.** Soient $u_1(x)$ et $u_2(x)$,deux prolongement de $u_0(x)$, $(x_n)_{n \in N}$ une suite de Cauchy dans $E$ à valeurs dans $E_o$. On a $u_1(x) = \lim u_o(x_n)$ et $u_2(x) = \lim u_o(x_n)$. Or, $u_o(x_n)$ est de Cauchy dans F, donc converge. On a donc $u_1(x) = u_2(x)$.

**Existence.** Soit $x \in E$ quelconque, il existe une suite $(x_n)_{n \in N}$ à valeurs dans $E_o$ telle que $x = \lim_n x_n$. $u_o(x_n)$ est de Cauchy dans $F$ car $u_o \in L(E_o, F)$, on a donc $u(x) = \lim u_o(x_n)$. Il reste à montrer que $u \in L(E, F)$ ; on a

$$\begin{aligned} u(x + \lambda y) &= \lim u_o(x_n + \lambda y_n) \\ &= \lim(u_o(x_n) + \lambda u_o(y_n)) \\ &= u(x) + \lambda u(y) \\ \|u_o(x_n)\|_F &\leq \|u_o\|_L(E, F)\|x_n\|_E \\ \Rightarrow \qquad \|u(x)\|_F &\leq \|u\|_L(E_o, F)\|x\| \\ \Rightarrow \qquad \|u\| &\leq \|u_o\| \end{aligned}$$

et l'égalité $\|u\| = \|u_o\|$est triviale.

$\square$

**Application**

$C([a,b])$ est dense dans $L^p(a,b)$, il suffit donc de définir une forme linéraire de $L^p(a,b)$ sur $C([a,b])$.

En général, on n'a pas de théorème général de prolongement si $E_o$n'est pas dense.

**Cas particuliers**:

- Hilbert
- $F = \mathbb{R}$

## 3.2 Espaces de Hilbert

### 3.2.1 Formes linéaires, espaces préhilbertiens

Dans la suite on considère $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ un sous espace vectoriel sur $K$.

**Définition 3.22** *On appelle application semi-linéaire ou antilinéaire de E espace vectoriel sur K une application vérifiant :*

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x) + u(y) & \forall (x,y) \in E^2 \\ u(\lambda x) = \bar{\lambda} \cdot u(x) & \forall x \in E, \quad \lambda \in E \end{cases}$$

Si K= $\mathbb{R}$ alors antilinéaire $\equiv$ linéaire

**Définition 3.23** *Si E espace vectoriel sur K*
*Alors $B : E\times E\to K$ est une forme sesquilinéaire si et seulement si :*

- *pour y fixé $\in E : x \to B(x,y)$ est linéaire*
- *pour x fixé $\in E : y \to B(x,y)$ est antilinéaire*

Si $K =\mathbb{R}$ alors sesquilinéaire $\equiv$ bilinéaire

**Définition 3.24** *B sesquilinéaire sur $E\times E$ est dite hermitienne si :*

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}$$

**Proposition 3.25** *B est hermitienne sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $B(x,x)$ est dans $\mathbb{R}$ pour tout $x$ dans $E$.*

*Preuve* - On suppose d 'abord que $B(x,x)$ $\mathbb{R}$ $\quad \forall x \in E$. On a donc

$$\underbrace{B(x+y,x+y)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{B(x,x)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{B(y,y)}_{\in\mathbb{R}} + B(x,y) + B(y,x)$$

De même en prenant $x = ix$, il vient

$$\begin{cases} B(x,y)+B(y,x) &= \alpha \in \mathbb{R} \\ i(B(x,y)+B(y,x)) &= \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et $B(x,y) = \frac{\alpha - i\beta}{2}$ et $B(y,x) = \frac{\alpha + i\beta}{2}$. On a donc $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ , B est hermitienne.

Réciproquement, si B est est hermitienne, $B(x,x) = \overline{B(x,x)}$ entraîne $B(x,x) \in \mathbb{R}$.

□

**Remarque 3.5** *Il n'y a rien d'analogue si $K = \mathbb{R}$*

**Proposition 3.26** *B hermitienne $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est complétement déterminée par ses valeurs sur la diagonale (i.e pour la donnée de $B(x,x)$).*

*Preuve* - On suppose d'abord que $K = \mathbb{C}$, on a alors l'idendité suivante :

$$4B(x,y) = B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) + iB(x+iy,x+iy) - iB(x-iy,x-iy)$$

Puis le cas $K = \mathbb{R}$ :

$$2B(x,y) = B(x+y,x+y) - B(x,x) - B(y,y)$$

□

**Définition 3.27** *B sesquilinéaire sur $E \times E$ est* ***positive*** *si $B(x,x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $E$. B sesquilinéaire sur $E \times E$ est* ***définie positive*** *si $B(x,x) > 0$ pour tout $x$ non nul dans $E$*

**Théorème 3.28** ***Inégalité de Cauchy Schwartz.*** *Si B est sesquilinéaire hermitienne positive sur $E \times E$, alors :*

$$|B(x,y)| \leq \sqrt{B(x,x)} \cdot \sqrt{B(y,y)}$$

*Si B est définie positive il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.*

*Preuve* -

- Cas $B \geq 0$. On part de l'identité

  $$B(x+\lambda y, x+\lambda y) = B(x,x) + 2Re(\overline{\lambda}B(x,y)) + |\lambda|^2 B(y,y) \geq 0$$

  dans laquelle on prends $B(x,y) = re^{i\theta}$, $r = |B(x,y)|$, $\lambda = te^{i\theta}$ $\; t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que

  $$f(t) = B(x,x) + 2t|B(x,y)| + t^2 B(y,y) \geq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$$

  c'est un trinôme à coefficients réels positifs ou nuls, il est positif pour tout $t$ si et seulement si son discriminant est négatif :

  $$|B(x,y)|^2 - B(x,x)B(y,y) \leq 0$$

  Ce qui assure le résultat pour $B \geq 0$

– Cas $B > 0$ (exercice)

□

**Définition 3.29** *E espace vectoriel est dit préhilbertien si on le munit d'une forme sesquilinéaire positive et hermitienne. On la note : $B(x, y) = (x, y)$. Deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont dits orthogonaux (on note quelquefois $x \perp y$ ) si $(x, y) = 0$.*

**Théorème 3.30** ***Inégalité de Minkovski.*** *Soient $x$ et $y$ dans $E$ préhilbertien, on a :*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$$

*Si $(x, y)$ est définie positive il y a égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires.*

*Preuve -*

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \\ \Leftrightarrow (x+y, x+y) &= (x,x) + (y,y) + 2Re(x,y) \\ & \leq (x,x) + (y,y) + 2(x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow Re(x,y) &\leq (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

qui est Cauchy-Shwartz.

□

**Théorème 3.31** *Si $E$ est préhilbertien et $(x, y)$ définie positive, alors $\|x\|^2 = (x, x)$ définit une norme sur $E$.*

### 3.2.2 Espaces de Hilbert. Théorème de projection

**Définition 3.32** *E est dit espace de Hilbert s'il est un espace préhilbertien muni d'une forme définie positive hermitienne et complet pour la norme associée.*

**Exemples :**

$$L^2(\Omega) \quad (f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2 \ ; \ \partial^\alpha f \in L^2 \quad \forall |\alpha| \leq m\} \quad (f,g)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)$$

**Définition 3.33** *Soit $F$ fermé de $E$ espace métrique et $a \in E$. Une projection de $a$ sur $F$ est un point $\alpha \in F$ tel que $d(a, F) = d(a, \alpha)$ avec $d(a, F) = \inf_{x \in F} d(a, x)$*

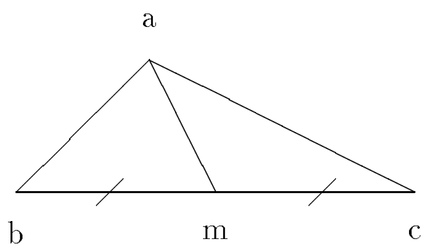
**Remarque 3.6** *Ce point n'est pas forcément unique ! Tous les points d'une sphère sont des projections du centre.*

**Théorème 3.34** *Si $E$ est un Hilbert et soit $F$ un fermé convexe non vide de $E$, alors chaque point de $E$ a une projection et une seule sur $F$.*

*Preuve - Point 1 :* Lemme de la médiane : On a l'identité suivante

$$\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = 2\|a-m\|^2 + \frac{1}{2}\|b-c\|$$

avec $m = \dfrac{b+c}{2}$




*Point 2 :*

$$d = d(a,F) = \inf_{x\in F}\|a-x\|$$

Soit $\{x_n\}$ ; $\|a-x_n\| \longrightarrow d$. On applique le lemme à $(a, x_m, x_n)$

$$\|a-x_m\|^2 + \|a-x_n\|^2 = 2\left\|a - \frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m+x_n\|$$

donc :

$$\frac{1}{2}\|x_m-x_n\|^2 = \underbrace{\|a-x_m\|^2}_{\to d} + \underbrace{\|a-x_n\|^2}_{\to d} - 2\underbrace{\|a - \overbrace{\frac{x_m+x_n}{2}}^{\in F}\|^2}_{\geq d}$$

et donc $\overline{lim}\|x_m-x_n\|^2 \leq 0$, donc $x_m$ de Cauchy dans F fermé.

*Point 3 :* Unicité

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux projections de a, d'après ce qui précède :

$$\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 + 2\underbrace{\left\|a - \frac{\alpha-\beta}{2}\right\|^2}_{\geq d^2} = \underbrace{\|a-\alpha\|^2}_{=d^2} + \underbrace{\|a-\beta\|^2}_{=d^2}$$

car

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \in F \Rightarrow \left\|a - \frac{\alpha+\beta}{2}\right\|^2 \geq d^2$$
$$\Rightarrow \|\alpha-\beta\|^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

□

**Théorème 3.35** ***Caractérisation de*** $\alpha$. *Si* $F$ *est une partie fermée convexe non vide de* $E$*, espace de Hilbert Alors la projection* $\alpha$ *de* $a \in E$ *sur* $F$ *est caractérisée par :*

$$\forall x \in F \qquad Re\,(a-\alpha; x-\alpha) \leq 0 \tag{3.1}$$

*Preuve -*

- Cas $\alpha = 0$
  On suppose d'abord que $\forall x \in F \qquad Re\,(a-\alpha; x-\alpha) \leq 0$. Nous avons donc :

$$\|a-x\|^2 = \|a\|^2 \underbrace{-2\underbrace{Re(a,x)}_{\leq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0} \geq \|a\|^2 \quad \forall x \in F$$

  et donc $\inf_{x \in F} \|a-x\|^2 = \|a\|^2$ est atteint en $x = 0$, ce qui signifie que $\alpha = 0$ est bien la projection de a sur F.

  Réciproquement

  On pose $\alpha = 0$ projection de a sur F. On a $\alpha = 0 \in F$ et donc

  $\forall x \in F, \quad \forall t \in [0,1], \quad (tx = tx + (1-t)\alpha) \in F$. En remarquant que $\|a - tx\|^2 \geq \|a\|^2 \quad \forall t \in [0,1]$, il vient

$$\|a\|^2 - 2tRe(a,x) + t^2\|x\|^2 \geq \|a\|^2$$

  et donc $t^2\|x\|^2 \geq 2tRe(a,x)$ et $t\|x\|^2 \geq 2Re(a,x)$ pour $t > 0$. Finalement en prenant $t \to 0^+$ on obtient :

$$Re(a,x) \leq 0$$

- Cas général :

  Soit $F_\alpha = F - \{a\} = \{x - \alpha, x \in F\}$. Comme $F$ est fermé convexe non vide $F_\alpha$ l'est également. Considérons $(a_\alpha = a - \alpha) \in E$, on observe alors que " $\alpha$ projection de a sur F "est équivalent à " 0 projection de $a_\alpha$ sur $F_\alpha$" Le résultat général découle alors facilement du cas $\alpha = 0$.

□

**Proposition 3.36** *Si* $E$ *est un espace métrique et* $F$ *fermé, alors* $a \in E \to d\,(a, F)$ *est lipchitz par rapport à a*

*Si* $E$ *est un espace de Hilbert et* $F$ *fermé convexe non vide, alors* $a \in E \to p_F\,(a)$ *sur* $F$ *est lipchitz par rapport à a*

**Proposition 3.37** *Dans un espace de Hilbert $E$ :*
*"$K$ convexe faiblement fermé" est équivalent à "$K$ convexe fortement fermé"*

*Preuve* - Tout ensemble faiblement fermé est fortement fermé donc :
$K$ faiblement fermé $\Rightarrow$ $K$ fortement fermé

Réciproquement, supposons que $K$ est fortement fermé. Soit $(x_n)$ une suite à valeurs dans $K$ de Cauchy pour la topologie faible de E.Il existe donc $x$ dans E tel que pour tout $y$ dans E $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$. Il s'agit de montrere que $x$ appartient à $K$. Soit $P$ le projecteur sur $K$ fortement fermé :

$$\begin{aligned} & Re(x - Px, X_n - Px) \leq \quad \forall x_n \\ \Leftrightarrow & Re(x - Px, x - Px) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x = Px \Leftrightarrow x \in K \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Applications du théorème de la projection aux sous espaces vectoriels d'un Hilbert

#### Projection sur un sous espace vectoriel fermé d'un Hilbert

**Théorème 3.38** *Soient $F$ un sous espace vectoriel fermé d'un Hilbert $E$ et $a$ dans $E$, n'appartenant pas à $F$, si $\alpha$ est la projection de $a$ sur $F$, alors, le segment $[\alpha, a] = \{t\alpha + (1-t)\alpha, t \in [0, 1]\}$ est l'unique perpendiculaire abaissée de $a$ sur $F$.*

*Preuve* - Le théorème 3.35 nous permet d'affirmer :

$$\forall x \in F \quad Re(a - \alpha, x - \alpha) \leq 0$$

Or pour F sous espace vectoriel et $\alpha \in F$, on a $(\alpha + y) \in F \qquad \forall y \in F$. Donc : $Re(a - \alpha, y) \leq 0 \quad \forall \in F$

De même pour $-y$, $iy$ et $-iy$... On en conclut :

$$(a - \alpha, y) = 0 \quad \forall y \in F$$

ce qui caractérise bien $[\alpha, a]$ comme l'unique perpendiculaire abaissée de $a$ sur $F$.

□

**Corollaire 3.39** *Si $E$ est un espace de Hilbert, soit $F$ une partie de $E$, pour que $G$ sous espace vectoriel engendré par $F$ soit dense dans $E$, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de vecteur non nul perpendiculaire à $F$.*

**Définition 3.40** *Si $F_1$ et $F_2$ sont 2 parties de $E$ espace de Hilbert,*
*On dit $F_1$ est orthogonal à $F_2$ si $\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, (x_1, x_2) = 0$.*
*On appelle orthogonal de $F$ et on note $F^+$, l'ensemble des éléments orthogonaux à $F$.*

**Proposition 3.41** *$F^+$ est un sous espace vectoriel fermé de $E$.*

*Preuve* - Soit $x \in E$,

$\{x\}^+ = \{y \in E, \quad (y,x) = 0\} = Ker\{y \to (y,x)\}$

est donc fermé.

$F^+ = \bigcap_{x \in F} \{x\}^+$ est donc fermé en tant qu'intersection de fermés.

□

**Proposition 3.42** *Si $F \subset E$, $E$ Hilbert, $G$ sous espace vectoriel engendré par $F$ , alors $F^+ = \bar{G}^+$.*

*Si $A \subset B$ Alors $A^+ \supset B^+$*

*Preuve* - Exercice

□

**Proposition 3.43** *Si $F$ est un sous espace vectoriel fermé de $E$ Hilbert, alors $E = F \oplus F^+$ et le projecteur de $E$ sur $F$ parallèlement à $F^+$ est l'application qui à $a \in E$ fait correspondre sa projection sur $F$: c'est le projecteur orthogonal de $E$ sur $F$. Sa norme est 1 si $F$ n'est pas $\{0\}$.*

*Preuve* -

– Soit : $\begin{cases} F \cap F^+ = \{0\} \\ x \in E \\ \xi \text{ la projection de } x \text{ sur } F \end{cases}$

Comme : $x = \xi + (x - \xi)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x-\xi, y) = 0 \quad \forall y \in F \Rightarrow x - \xi \in F^+ \\ &\Rightarrow E = F + F^+ \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} &\|x\|^2 = \|x-\xi\|^2 + \|x\|^2 \Rightarrow \|\xi\| \leq \|x\| \\ &\Rightarrow \|p\| \leq 1 \end{aligned}$$

Si $x \in F$, $\xi(x) = x \Rightarrow \qquad \|p\| = 1$

□

**Proposition 3.44** *Soit $E$ un espace de Hilbert. les propriétés suivantes sont vraies :*

*a) $F \subset E \Rightarrow F^{++} = \bar{G}$ où $G$ est le sous espace engendré par $F$*

*b) $F$ sous espace vectoriel de $E \Rightarrow F^{++} = \bar{F}$*

*c) $F$ sous espace vectoriel fermé de $E \Rightarrow F^{++} = F$*

*d) $F \subset E \quad F^{+++} = F^+$*

*e) $(F_i)_{i \in I}, F_i \subset E$ alors $(\bigcup_{i \in I} F_i)^+ = \bigcap_{i \in I} F_i^+$*

*f) Si $F_i$ sous espaces vectoriels fermés $\bigcap_{i \in I} F_i$ =adhérence du sous espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} F_i^+$*

*Preuve* - Exercice

□

**Théorème 3.45** ***Théorème de prolongement.*** *Si $E$ est un espace de Hilbert, $E_o$ un sous espace vectoriel de $E$, $F$ un Banach, et si $u_o \in L(E_o, F)$ alors $u_o$ se prolonge en $u \in L(E, F)$ et on peut choisir*

$$\|u\|_{L(E,F)} = \|u_o\|_{L(E_o,F)}$$

*Preuve* -

$$E = \overline{E}_0 \oplus E_0^+$$

$u_0$ se prolonge de manière unique en $u_0 \in L(\overline{E}_0, F)$ et ensuite $u = u_0 \circ p_{\overline{E}_0}$

□

**Familles orthogonales et Bases Hilbertiennes**

**Définition 3.46** *Une famille d'élèments $x_\lambda$, $\lambda \in I$ ($I$ famille d'indices) d'un espace de Hilbert $E$ est orthonormale si*

$$(x_\lambda, x_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} = \begin{cases} 0 & si\ \lambda \neq \lambda' \\ 1 & si\ \lambda = \lambda' \end{cases}$$

**Remarque 3.7** *les $\{x_\lambda\}$ sont linéairement indépendants :*
*Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{\lambda_i} = 0$, alors :*

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{\lambda_i}, x_{\lambda_i} \right) = \alpha_j \quad \forall j \in \{1, ..n\}$$

**Proposition 3.47** ***Orthogonalisation de Schmidt.*** *A toute suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ d'éléments linéairement indépendants de $E$, on peut associer une suite orthogonale $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.*

*Preuve* - Posons :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} = u_{n+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{(u_{n+1}, v_i)}{\|v_1\|^2} v_i \end{cases}$$

Nous allons montrer par récurrence que les $v_i$ sont alors bien définis et orthogonaux.
*Récurrence :* $\{v_i\}$ non nul pour $i \leq n$ et orthogonaux deux à deux.
L' hypothèse est vrai pour $n = 1$. Soit $j \leq n$,

$$(v_{n+1}, v_j) = (u_{n+1}, v_j) - \frac{(u_{n+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} \|v_j\|^2 = 0$$

Si $v_{n+1} = 0$ alors :

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{n+1}, v_i)}{\|v_i\|^2} v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

les $v_{i \leq n}$ sont des conditions limites de $\{u_j\}$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nous avons donc :

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$$

C'est contradictoire avec l'indépendance des $\{u_i\}$. Donc $v_{n+1} \neq 0$, la récurrence est démontrée.
Pour le résultat final, il suffit de prendre :

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$$

□

**Définition 3.48** *Une famille $\{x_\lambda\}, \lambda \in I$ ensemble d'indices, d'un espace de Hilbert $E$ est totale (ou complète) dans $E$ si $\forall \lambda \in I, (y, x_\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0$*

**Proposition 3.49** *Le sous espace vectoriel engendré par une famille totale est dense dans $E$.*

*Preuve* - Soit,

$$\begin{cases} W \text{ l'espace vectoriel engendré par } \{x_\lambda\}_{\lambda \in I} \\ \overline{W} \text{ la fermeture de } W \end{cases}$$

D'après la proposition 3.6, nous avons : $E = \overline{W} \oplus \overline{W}^+$.

$$W^+ = \{y \ ; \ (y; x) = 0 \quad \forall x \in \overline{W}\} \Rightarrow (y \ , \ x_\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in I$$
$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \overline{W}^+ = 0 \Rightarrow E = \overline{W}$$

□

**Proposition 3.50** *Si dans un espace de Hilbert, il y a une famille $u_n$ n=$\{1..n\}$ dénombrable et totale, alors il y a aussi une famille $w_n$ associée orthogonale,totale et dénombrable.*

*Preuve* - Exercice

□

**Définition 3.51** *Une base Hilbertienne est une famille orthogonale totale.*

**Théorème 3.52** *Tout Hilbert admet une base hilbertienne.*

*Preuve* - Admise, conséquence du théorème de Zorn

□

**Théorème 3.53** ***Relation de Parseval.*** *Soit* $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ *une base Hilbertienne de E Hilbert (E est alors séparable) si* $x \in E$*, en posant :*

$$P_m(x) = \sum_{n=1}^{m} (x, w_n) w_n,$$

*on a :* $\lim_{n\to\infty} \|P_m(x) - x\| = 0$ *et*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, w_n)^2| \qquad (Relation\, de\, Parseval)$$

*Preuve* - Soit $\widetilde{P_m}$ la projection sur l'espace vectoriel engendré par $\{w_1, \dots, w_m\}$.

$$\widetilde{P_m} x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_j w_j \qquad \left(\widetilde{P_m} x - x \ , \ w_j\right) = 0 \quad \forall j$$

*Caractéristique de la projection sur un sous-espace vectoriel* et donc $\alpha_j = (x, w_j)$ et $\widetilde{P_m} = P_m$

$$\|P_m x\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \|(x, w_n)\|^2$$

Mais l'espace vectoriel $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ est dense dans E. On peut donc approcher $x \in E$ par une suite $x_m = \sum_n a_m^n w_n$ avec un nombre fini de $a_m^n$ non nuls pour chaque m ; a fortiori $P_m x \to x$ (puisque $\|P_m x - x\| \leq \|x_m - x\|$) et donc :

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m x - x\| = 0$$

et en utilisant :

$$\|P_m x\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \|(x, w_n)\|^2$$

on arrive à : $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, w_n)|^2$

□

**Théorème de représentation (Rietz)**

**Théorème 3.54** *Soit $E$ un espace de Hilbert et $L \in E'$, alors, il existe un élément $x_L$ unique tel que :*

$$\begin{cases} L(y) = (y, x_L) & \forall y \in E \\ \|x_L\|_E = \|L\|_{E'} \end{cases}$$

*Réciproquement, tout élément $x \in E$ définit une forme linéaire continue sur E, $L_x$ par :*

$$L_x(y) = (y, x)$$

$$\|L_x\|_{E'} = \|x\|_E$$

*Preuve* - Soit $L \in E'$

– *Unicité de $x_L$*

$$\begin{aligned} & L(y) = (y, x_1) = (y, x_2) \Rightarrow (y, x_1 - x_2) = 0 \quad \forall y \in V \\ & \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

– *Existence de $x_L$.*

On suppose $L \neq 0$ (sinon c'est évident) $KerL = \{z \in E;\ \ L(z) = 0\}$

On en déduit : $(KerL)^+ \neq \{0\}$ sinon $L = 0$.

Soit $w \in (KerL)$, on a forcément : $w \neq 0$, $dim(KerL)^+ = 1$, sinon

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{w_1}{L(w_1)} - \frac{w_2}{L(w_2)}\right) = 0 \\ & \Rightarrow \left(\frac{w_1}{L(w_1)} - \frac{w_2}{L(w_2)}\right) \in KerL \end{aligned}$$

en contradiction avec $w_1$ et $w_2$ independants et appartenant à $(KerL)^+$.

$$E = KerL \oplus (KerL)^+$$

On prend : $y = y_k + y_k^+$ avec : $\begin{cases} y_k \in Ker\text{L} \\ y_k^+ \in (KerL)^+ \end{cases}$.

On écrit : $y = y_k + \lambda w$ avec $(y, w) = \lambda\|w\|^2$.

$$\begin{aligned} L(y) &= L(y_k) + \lambda L(w) = \lambda L(w) \\ &= \frac{(y, w)}{\|w\|^2} L(w) = (y, \frac{\overline{L(w)}}{\|w\|^2} w) \end{aligned}$$

ce qui donne : $x_L = \dfrac{\overline{L(w)}}{\|w\|^2} w$ et par la suite :

$$\|L\|_{E'} = \sup_{y \in E} \frac{\|(y, x_L)\|}{\|y\|} = \|x_L\|_E$$

La réciproque est évidente

□

**Corollaire 3.55** *Tout espace de Hilbert est réflexif*

*Preuve* -: Le théorème de représentation du Rietz montre que l'on peut identifier $E$ et $E'$ avec une correpondance biunivoque, cette correpondance n'est pas linéaire. $x \to L_x$ est antilinéaire car :

$$L_{\lambda x}(y) = (y, \lambda x) = \overline{\lambda}(y, x) = \overline{\lambda} L_x(y)$$

Mais $E'$ est un Hilbert pour le produit scalaire :

$$(L_1, L_2)_{E'} = (x_{L_1}, x_{L_2})_E$$

donc :

$$\begin{aligned}(\lambda L_1, \mu L_2)_{E'} &= (x_{\mu L_2}, x_{\lambda L_1}) = (\overline{\mu} x_{L_2}, \overline{\lambda} x_{L_1}) \\ &= \lambda \overline{\mu}(x_{L_2}, x_{L_1}) = \lambda \overline{\mu}(L_1, L_2)_{E'}\end{aligned}$$

qui est compatible avec la norme induite dans $E'$ puisque $(L, L) = \|x_L\|_E^2 = \|x_L\|_{E'}^2$. On a donc toujours le théorème de Rietz qui donne une correspondance biunivoque entre $E'$ et $E''$. La correspondance finale $E \leftrightarrow E''$ est alors linéaire.

□

# Chapitre 4

# Transformée de Fourier discrète

## 4.1 Rappels sur les séries de Fourier

Soit $L_p^q(T)$ ($q \geq 1$) l'ensemble des (classes de) fonctions $f$ mesurables $T$-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et telles que

$$\int_0^T |f(t)|^q \, dt < \infty.$$

Cet espace est muni de la norme (qui en fait un espace de Banach)

$$||f||_q = \left( \int_0^T |f(t)|^q \, dt \right)^{1/q}$$

L'espace $L_p^2(T)$ est muni de plus du produit scalaire associé

$$\langle f, g \rangle_{2,T} = \int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, dt$$

qui en fait un espace de Hilbert. On note $P_N$ le sous-espace de $L_p^2(T)$ formé des polynômes trigonométriques de la forme

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} p_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L_p^1(T)$ sont définis par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \mathrm{e}^{-2i\pi nt/T} \, dt$$

**Proposition 4.1** *(Théorème de projection) Soit $f \in L_p^2(T)$. La projection orthogonale de $f$ sur le sous-espace $P_N$ est*

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

*et on a :*

$$\begin{aligned} ||f||_2^2 &= ||f_N||_2^2 + ||f - f_N||_2^2 \quad \textit{(Pythagore)} \\ &= T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + ||f - f_N||_2^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T}||f||_2^2, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \textit{(Inégalité de Bessel)}$$

**Théorème 4.2** *Soit $f \in \mathrm{L}_p^2(T)$. La suite des projections $f_N$ converge vers $f$ dans $\mathrm{L}_p^2(T)$, et*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}||f||_2^2 \qquad \textit{(égalité de Parseval).}$$

**Décroissance des coefficients**

Soit $\mathrm{H}_p^m(T)$ l'ensemble des fonctions $T$-périodiques sur $\mathbb{R}$ dont les dérivées au sens des distributions jusqu'au rang $m$ sont de carré localement intégrable.

**Proposition 4.3** *Soit $f \in \mathrm{H}_p^m(T)$. Alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m c_n|^2 < \infty.$$

**Corollaire 4.4** *Soit $f \in \mathrm{H}_p^1(T)$. La suite $f_N$ converge uniformément vers une fonction continue $\tilde{f}$ telle que $||f - \tilde{f}||_2 = 0$ (égalité presque partout).*

## 4.2 La transformée de Fourier discrète

Supposons que l'on souhaite calculer les coefficients de Fourier d'une fonction $f$ $T$-périodique dont on ne connait qu'un nombre fini $N$ de valeurs

$$y_k = f(\frac{kT}{N}) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Pour cela, on approche l'intégrale $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt/T}\,dt$ par la formule des trapèzes :

$$c_n \simeq Y_n := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathrm{e}^{-2i\pi kn/N} \tag{4.1}$$

On remarque que la suite $Y_n$, tout comme la suite $y_k$, est $N$-périodique. On notera $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites complexes $N$-périodiques.

**Définition 4.5** *L'application linéaire $\mathcal{F}_N$ définie par (4.1) :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N \ &: \ \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}} \\ y = (y_k)_{k\in Z} &\longmapsto Y = (Y_n)_{n\in Z} \end{aligned}$$

*est appelée transformée de Fourier discrète d'ordre $N$.*

**Proposition 4.6** *L'application $\mathcal{F}_N$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$, d'inverse donné par*

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \mathrm{e}^{2i\pi kn/N} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

**Erreur d'approximation**

Supposons ici $N$ pair. On approche $f$ par

$$p(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} Y_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

En utilisant le résultat précédent, on peut montrer que

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n+kN}$$

L'erreur de calcul sur les coefficients de Fourier est ainsi

$$Y_n - c_n = \sum_{k \neq 0} c_{n+kN}, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1$$

L'approximation sera alors d'autant meilleure que la suite $c_n$ tend vers zéro rapidement quand $|n| \to \infty$, i.e. d'autant meilleure que $f$ est régulière.

## 4.3 La transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide (TFR, en anglais FFT) a été inventée en 1965 par Cooley et Tuckey. A priori, le calcul de $Z_n := NY_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathrm{e}^{-2i\pi kn/N}$ pour $n = 0, 1, \dots, N-1$ nécessite $(N-1)^2$ multiplications $+N(N-1)$ additions $\simeq 2N^2$ opérations. En supposant $N$ pair, $N = 2M$, on peut accélérer les calculs : en distinguant les indices pairs des indices impairs, on a

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{k=0}^{M-1} y_{2k} \mathrm{e}^{-2i\pi kn/M} + \mathrm{e}^{-2i\pi n/N} \sum_{k=0}^{M-1} y_{2k+1} \mathrm{e}^{-2i\pi kn/M} \\ &=: G_n + \mathrm{e}^{-2i\pi n/N} H_n \end{aligned}$$

Du fait que

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2i\pi k(n+M)/M} &= \mathrm{e}^{-2i\pi kn/M} \\ \mathrm{e}^{-2i\pi(n+M)/N} &= -\mathrm{e}^{-2i\pi n/N} \end{aligned}$$

on remarque que

$$\begin{aligned} G_{n+M} &= G_n \\ H_{n+M} &= H_n \\ Z_{n+M} &= G_n - \mathrm{e}^{-2i\pi n/N} H_n \end{aligned}$$

où $(G_n)$ et $(H_n)$ sont *aussi* des transformées de Fourier discrètes, d'ordre moitié $M = N/2$. Si $M$ est pair, on peut réitérer le procédé.

### Evaluation du nombre d'opérations si $N = 2^p$

Soit $u_p$ le nombre d'opérations nécessaires pour calculer tous les termes $Z_n$ par ce procédé à l'ordre $p$.
Le calcul des $G_n$ et $H_n$ nécessite $2u_{p-1}$ opérations.
Le calcul des $Z_n$ et $Z_{n+M}$ nécessite $3 \times 2^{p-1} - 1$ opéarations ($2^{p-1}$ multiplications et $2^p$ additions).
D'où les relations

$$\begin{aligned} u_p &= 2u_{p-1} + 3 \times 2^{p-1} - 1 \\ u_0 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $u_p = 2^{p-1}(3p-2) + 1$, soit en fonction de $N$, un coût global de

$$\frac{N}{2}(3\log_2 N - 2) + 1 \simeq 1,5N\log_2 N$$

ce qui représente un gain appréciable. Par exemple, pour $N \simeq 1000$, on aura environ 15 000 opérations au lieu de 2 000 000, soit un facteur de réduction supérieur à 100.

### Application à la convolution discrète (périodique)

Soient $x_n$ et $h_n$ deux suites $N$-périodiques. La *convolution périodique* de ces deux suites est la suite $N$-périodique définie par

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{n-k} \quad \left( = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} h_k \right).$$

Le calcul de cette convolution nécessite normalement $(2N-1)N \simeq 2N^2$ opérations. Soient $X_n$, $H_n$, $Y_n$ et $P_n$ les transformées de Fourier discrètes des suites $x_n$, $h_n$, $y_n$ et $x_n h_n$.

**Proposition 4.7** *On a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} Y_n &= N X_n H_n \\ P_n &= \sum_{k=0}^{N-1} X_k H_{n-k} \end{aligned}$$

Pour accélérer les calculs, on calcule par FFT les suites $X_n$ et $H_n$, puis le produit $Y_n = NX_nH_n$, et enfin $y_n$ par FFT inverse. Le coût est de trois FFT + N multiplications, soit environ $N(4,5\log_2 N + 1)$, au lieu de $2N^2$ opérations.

Lorsque les suites ne sont pas périodiques mais finies, on les périodise après les avoir complétées avec un nombre suffisant de zéros, et on applique la même méthode, ce qui permet un calcul rapide de la convolution ordinaire (non périodique).

Si les coefficients sont réels, il existe une méthode similaire utilisant des cosinus au lieu d'exponentielles : la transformée en cosinus discrète (TCD, en anglais DCT).

# Chapitre 5

# Transformée de Fourier $\mathrm{L}^1$

On note $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ ($q \geq 1$) l'ensemble des (classes de) fonctions $f$ mesurables sur $\mathbb{R}$, à valeur complexe, telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^q \, dt < \infty$. Muni de la norme

$$||f||_q = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^q \, dt \right)^{1/q},$$

c'est un espace de Banach. Pour $q = \infty$, $||f||_\infty$ designe le sup essentiel de $|f|$ sur $\mathbb{R}$.

## 5.1 Définition et propriétés

**Définition 5.1** *Soit $f \in \mathrm{L}^1$. La transformée de Fourier de $f$, notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$, est définie par*

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-2i\pi\lambda t} \, dt$$

*On définit également*

$$\overline{\mathcal{F}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{2i\pi\lambda t} \, dt$$

Les deux applications $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont linéaires, et nous verrons qu'elles sont inverses l'une de l'autre pour certaines classes de fonctions.

**Théorème 5.2** *(Théorème de Rieman-Lebesgue) Soit $f \in \mathrm{L}^1$. Alors :*
*i) la fonction $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, avec*

$$||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$$

*ii)*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$$

**Proposition 5.3** *(Formule de dualité) Soient $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^1$. On a l'égalité suivante :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{g}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)g(t)\, dt$$

**Proposition 5.4** *(Propriétés de la transformée de Fourier) Soient $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^1$, et $a \in \mathbb{R}^*$.*
*1) Translation et modulation par $e_a(t) = \mathrm{e}^{2i\pi a t}$ :*

$$\widehat{\tau_a f}(\lambda) = e_{-a}(\lambda)\widehat{f}(\lambda) \qquad \widehat{e_a f}(\lambda) = \tau_a \widehat{f}(\lambda)$$

*2) Changement d'échelle : pour $h(t) = f(t/a)$, on a*

$$\widehat{h}(\lambda) = |a|\widehat{f}(\lambda a)$$

*3) Symétrisation, conjugaison et parité :*

$$\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}f)_\sigma \qquad \overline{\mathcal{F}f} = \overline{\mathcal{F}}\ \overline{f}$$

$$\begin{aligned} \textit{partie paire réelle de } f &\longmapsto \textit{ partie paire réelle de } \widehat{f} \\ \textit{partie paire imaginaire de } f &\longmapsto \textit{ partie paire imaginaire de } \widehat{f} \\ \textit{partie impaire réelle de } f &\longmapsto i \times \textit{partie impaire imaginaire de } \widehat{f} \\ i \times \textit{partie impaire imaginaire de } f &\longmapsto \textit{ partie impaire réelle de } \widehat{f} \end{aligned}$$

*4) Convolution :*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$$

*5) Dérivation : si $t^k f \in \mathrm{L}^1$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, alors $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et*

$$\widehat{f}^{(k)}(\lambda) = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^k f\right)(\lambda) \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

*Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(k)} \in \mathrm{L}^1$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, alors*

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k \widehat{f}(\lambda)$$

*Plus généralement, si $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$, en notant $D^k$ l'opérateur différentiel $D^k f = f^{(k)}$, on a*

$$\mathcal{F}(P(D)f)(\lambda) = P(2i\pi\lambda)\widehat{f}(\lambda)$$

*6) Si $f \in \mathrm{L}^1$ est à support compact, alors $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

**Application :** La Gaussienne $G(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ est un point fixe de la transformée de Fourier :

$$\widehat{G} = G.$$

## 5.2 Transformée de Fourier inverse dans $\mathrm{L}^1$

### 5.2.1 Espace $\mathcal{S}$ des fonctions "à décroissance rapide"

**Définition 5.5** *L'espace $\mathcal{S}$ des fonctions "à décroissance rapide" est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ qui vérifient pour tout $p,\ k \in \mathbb{N}$ :*

$$\lim_{|t|\to\infty} \left| t^p \varphi^{(k)}(t) \right| = 0$$

*C'est un espace vectoriel, muni de la notion de convergence suivante : on dit que $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}$ si pour tout $p,\ k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| t^p \varphi_n^{(k)}(t) \right|\right|_\infty = 0$$

**Proposition 5.6** *L'espace $\mathcal{S}$ est stable :*
*1) pour la multiplication par un polynôme : $P\varphi \in \mathcal{S}$ pour tout polynôme $P$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}$,*
*2) pour la dérivation : $\varphi' \in \mathcal{S}$ si $\varphi \in \mathcal{S}$,*
*3) par transformation de Fourier : $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ si $\varphi \in \mathcal{S}$.*
*De plus, ces opérations sont continues.*

**Proposition 5.7** *(Inversion de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$)*
*i) Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On a la formule de reconstruction suivante :*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\lambda) \mathrm{e}^{2i\pi\lambda t}\, d\lambda$$

*ii) La transformation de Fourier est une bijection bicontinue de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, avec $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, de "période" quatre : $\mathcal{F}^4 = I$.*

### 5.2.2 Théorème d'inversion

**Théorème 5.8** *Soit $f \in \mathrm{L}^1$. On suppose que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$, et on pose*

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{2i\pi\lambda t}\, d\lambda.$$

*Alors $f(t) = f_0(t)$ presque partout, i.e. $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ presque partout.*

**Corollaire 5.9** *On suppose que $f$ et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}^1$. Alors $f$ est égale presque partout à une fonction continue. En particulier $\widehat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. : la transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}^1$.*

## 5.3 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert

Soit un filtre

$$\begin{aligned} A \ : \ \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ x &\longmapsto Ax = h * x \end{aligned}$$

**Proposition 5.10** *On suppose que $h \in \mathrm{L}^1$. Alors la fonction de transfert $H(\lambda)$ du filtre $A$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$ :*

$$H(\lambda) = \widehat{h}(\lambda)$$

**Corollaire 5.11** *Si de plus $x \in \mathrm{L}^1$, le signal sortant $y = Ax$ a pour transformée de Fourier*

$$\widehat{y}(\lambda) = H(\lambda)\widehat{x}(\lambda).$$

# Chapitre 6

# Transformée de Fourier $\mathrm{L}^2$

Rappelons que $\mathrm{L}^2$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

est un espace de Hilbert. Sa norme $||f||_2 = \langle f, f\rangle_2^{1/2}$ sera notée simplement $||f||$. Nous allons prolonger à $\mathrm{L}^2$ la transformation de Fourier déjà définie sur le sous espace $\mathcal{S}$.

## 6.1 Théorème de Plancherel

**Proposition 6.1** *(Egalité de Parseval) Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{S}$. On a*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_2 = \langle f, g\rangle_2 \tag{6.1}$$

*et en particulier pour $f = g$ :*

$$||\widehat{f}|| = ||f||$$

L'égalité (6.1) montre que la transformation de Fourier est une *isométrie* de $\mathcal{S}$ muni de la norme de $\mathrm{L}^2$.

D'autre part, $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathrm{L}^2$ (car $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathrm{L}^2$ et $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathrm{L}^2$). En utilisant la propriété suivante : toute application linéaire continue sur un sous-espace dense d'un espace vectoriel normé se prolonge de manière unique en une application linéaire continue sur l'espace tout entier, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 6.2** *(Théorème de Plancherel) La transformation de Fourier définie sur $\mathcal{S}$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $\mathrm{L}^2$, toujours notée $\mathcal{F}$, qui vérifie donc pour tout $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^2$ :*

$$\begin{aligned}
&i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{g}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)g(t)\, dt,\\
&ii) \quad \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_2 = \langle f, g\rangle_2,\\
&iii) \quad ||\widehat{f}|| = ||f||,\\
&iv) \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f \quad p.p.
\end{aligned}$$

**Remarque 6.1** *Il faut à priori vérifier que cette transformation de Fourier coïncide sur* $\mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^1$ *avec celle déjà définie sur* $\mathrm{L}^1$. *Ceci se montre en utilisant cette fois-ci la densité de* $\mathcal{S}$ *dans* $\mathrm{L}^1$.

Il reste à établir comment calculer de manière effective $\widehat{f}$ quand $f \in \mathrm{L}^2$.

**Proposition 6.3** *Soit* $f \in \mathrm{L}^2$. *On pose pour* $a > 0$

$$F_a(\lambda) = \int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda t}\, dt.$$

*Alors on a*

$$\lim_{a \to +\infty} ||F_a - \widehat{f}|| = 0.$$

## 6.2 Convolution et transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2$

Rappelons que pour $f$ et $g$ dans $\mathrm{L}^2$, la fonction $f * g$ est continue (uniformément), et que l'application $(f,\, g) \mapsto f * g$ est continue de $\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2$ dans $\mathcal{C}^0$ (on note $\mathcal{C}^0$ l'espace des fonctions *continues* et *bornées* sur $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup).

**Proposition 6.4** *Soient* $f$ *et* $g$ *dans* $\mathrm{L}^2$. *Alors on a*

$$\begin{aligned} &i) \quad f * g(t) = \overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ &ii) \quad \widehat{fg}(\lambda) = \widehat{f} * \widehat{g}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Remarque 6.2** *On aimerait pouvoir écrire aussi* $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$, *mais pour cela il faudrait avoir* $f * g \in \mathrm{L}^1 \cup \mathrm{L}^2$, *ce qui n'est pas forcément le cas pour* $f$ *et* $g$ *dans* $\mathrm{L}^2$. *Nous verrons cependant que c'est vrai au sens des distributions.*

## 6.3 Application 1, principe d'incertitude (Heisenberg)

Ce principe exprime qu'un signal a un spectre d'autant plus étalé que l'énergie du signal est concentrée autour d'un instant donné, et vice-versa. Ces mêmes équations traduisent en mécanique quantique le fait que la précision sur la position d'une particule est d'autant plus faible que celle sur son moment est grande, et réciproquement.

Soit $f \in \mathrm{L}^2$. On suppose que $tf(t)$ est $\lambda\widehat{f}(\lambda)$ sont dans $\mathrm{L}^2$. On définit :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|^2\, dt, \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda\hat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda. \end{aligned}$$

Quitte à remplacer $f$ par $\tau_a \exp(2i\pi bt)f(t)$, on peut supposer que $f$ et $\widehat{f}$ sont centrées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2 \, dt = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |f(\lambda)|^2 \, d\lambda.$$

Dans ce cas, $\sigma$ est l'écart type par rapport au temps de $|f|^2$, et $\widehat{\sigma}$ l'écart type par rapport à la fréquence de $|\widehat{f}|^2$.

**Proposition 6.5** *On suppose de plus que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a la relation :*

$$\sigma \widehat{\sigma} \;\geq\; \frac{1}{4\pi}.$$

**Remarque 6.3** *L'égalité a lieu ssi $f'$ et $tf$ sont colinéaires, donc si $f$ est de la forme (Gaussiennes) :*

$$f(t) = a\mathrm{e}^{ct^2}, \qquad c < 0.$$

## 6.4 Application 2, résolution d'équations différentielles

Soit $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme avec $n \geq 1$ et $a_n$ non nul. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = x \qquad x \in \mathrm{L}^2. \tag{6.2}$$

Par transformée de Fourier, on a (nous verrons au chapitre distributions que ces calculs sont légitimes) :

$$P(2i\pi\lambda)\widehat{y}(\lambda) = \widehat{x}(\lambda).$$

Supposons que $P$ n'ait pas de racines sur l'axe imaginaire, et posons

$$H(\lambda) = \frac{1}{P(2i\pi\lambda)}.$$

Comme $\deg(P) \geq 1$, la fonction bornée $H$ est dans $\mathrm{L}^2$ et admet une transformée de Fourier inverse $h \in \mathrm{L}^2$ : $H = \widehat{h}$. On a donc nécessairement

$$\widehat{y} = \widehat{h}\widehat{x} \;\in \mathrm{L}^2$$

et d'après la proposition 6.4, on a

$$y = h * x.$$

**Proposition 6.6** *Sous les hypothèses précédentes, l'équation (6.2) admet dans $\mathrm{L}^2$ une solution unique $y$, et l'application*

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathrm{L}^2 &\longrightarrow \mathcal{C} \quad (\text{ou } \mathrm{L}^2) \\ x &\longmapsto y = h * x \end{aligned}$$

*est un filtre.*

**Remarque 6.4** *Les autres solutions sont de la forme $z = y + y_0$ où $y_0$ est une solution de l'équation homogène associée à (6.2).*

# Chapitre 7

# Filtres analogiques

## 7.1 Filtres passe-bas et filtres passe-bande

Le filtre passe-bas idéal est donné pas sa fonction de transfert :

$$H(\lambda) = a \ \mathrm{rect}_{2B}(\lambda)\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda t_0}.$$

Sa réponse impulsionnelle est

$$h(t) = 2a\,B\,\mathrm{sinc}(2B(t-t_0)).$$

Ce filtre ne laisse passer que les fréquences $|\lambda| < B$ (on ne peut rien dire du cas limite $|\lambda| = B$). Sur cette bande de fréquence, le signal est retardé de $t_0$ et amplifié d'un facteur $a$.

Le filtre passe-bande idéal est donné pas sa fonction de transfert :

$$H(\lambda) = a \ \left(\mathrm{rect}_{2B}(\lambda-\lambda_0) + \mathrm{rect}_{2B}(\lambda+\lambda_0)\right)\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda t_0}.$$

Sa réponse impulsionnelle est

$$h(t) = 4a\,B\,\mathrm{sinc}(2B(t-t_0))\cos(2\pi\lambda_0(t-t_0)).$$

Ce filtre ne laisse passer que les fréquences $|\lambda \pm \lambda_0| < B$. Sur cette bande de fréquence, le signal est retardé de $t_0$ et amplifié d'un facteur $a$. On remarquera que sa réponse impulsionnelle est une fréquence porteuse $\cos(2\pi\lambda_0(t-t_0))$ modulée en amplitude par la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas précédent.

Ces deux types de filtres ne sont pas réalisables. En effet :

**Proposition 7.1** *Soit $A$ un filtre*

$$\begin{aligned} A \ : X &\longrightarrow Y & \qquad X,\ Y \subset \mathcal{D}' \\ x &\longmapsto y = h * x & h \in \mathcal{D}' \end{aligned}$$

*Le filtre $A$ est causal si et seulement si* $\mathrm{supp}\, h \subset \mathbb{R}_+$.

## 7.2 Filtres gouvernés par une équation différentielle

On ne peut donc qu'*approcher* un filtre idéal par un filtre réalisable. Les spécifications d'un filtre sont alors données avec des tolérances (un *gabarit*) que doivent satisfaire $|H(\lambda)|$ et $\operatorname{Arg}(H(\lambda))$. Les filtres analogiques sont souvent réalisés à l'aide de systèmes gouvernés par des équations différentielles. Supposons que l'on ait trouvé une fraction rationnelle qui satisfasse le gabarit donné ; encore faut-il savoir si l'on pourra lui associer un circuit, un système, dont la fonction de transfert soit cette fraction. Nous allons caractériser les fractions qui donnent des filtres réalisables.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes avec

$$0 \le \deg Q < \deg P,$$

et l'équation différentielle

$$P(D)y = Q(D)x, \tag{7.1}$$

de transformée de Fourier

$$P(2i\pi\lambda)\widehat{y} = Q(2i\pi\lambda)\widehat{x}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $Q/P \in \mathrm{L}^2$ est que $P$ n'ait pas de racines sur l'axe imaginaire, ce que l'on suppose désormais. La décomposition de $Q/P$ en éléments simples est de la forme

$$H(\lambda) = \frac{Q(2i\pi\lambda)}{P(2i\pi\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(2i\pi\lambda - z_k)^{m_k+1}},$$

avec $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $m_k \in \mathbb{N}$, les $z_k$ étant les pôles de la fraction, non forcément distincts deux à deux.

Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(a) > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{\pm at}\, u(\mp t)\right)(\lambda) = \frac{\mp 1}{(2i\pi\lambda \mp a)^{k+1}} \tag{7.2}$$

Soit : $K_+$ l'ensemble des indices $k$ tels que $\operatorname{Re}(z_k) > 0$,
$K_-$ l'ensemble des indices $k$ tels que $\operatorname{Re}(z_k) < 0$.
D'après (7.2), on a $H(\lambda) = \widehat{h}(\lambda)$ avec

$$h(t) = \sum_{k\in K_-} \frac{\gamma_k\, t^{m_k}}{m_k!}\mathrm{e}^{z_k t}\, u(t) - \sum_{k\in K_+} \frac{\gamma_k\, t^{m_k}}{m_k!}\mathrm{e}^{z_k t}\, u(-t)$$

(comparer avec (1.22)), et la solution dans $\mathrm{L}^2$ de (7.1) est

$$y(t) = h * x(t).$$

**Proposition 7.2** *Le filtre de* $\mathrm{L}^2$ *dans* $\mathrm{L}^2$ *défini par (7.1) est causal si et seulement si* $K_+ = \emptyset$, *i.e. si et seulement si les pôles vérifient*

$$\operatorname{Re}(z_k) < 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

Le problème de la réalisation d'un filtre comportera alors les étapes suivantes :
- choix du gabarit (spécifications),
- recherche de la fraction la plus simple possible, dont les pôles soient à partie réelle $< 0$, et qui respecte les contraintes du gabarit,
- recherche d'un système gouverné par l'équation différentielle que définit cette fraction.

## 7.3 Exemple des filtres de Butterworth

Considérons le gabarit suivant (où $\varepsilon > 0$):

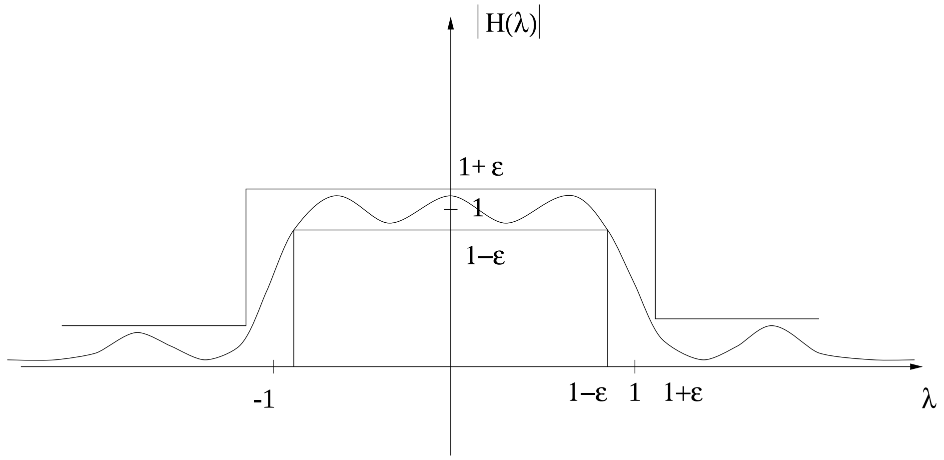



FIG. 7.1: *gabarit d'un filtre passe-bas*

Un candidat possible pour approcher le filtre idéal $\mathrm{rect}_2(\lambda)$ est donné par

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1+\lambda^{2p}}. \tag{7.3}$$

Pour $p$ assez grand, cette fonction rentre dans le gabarit. Déterminons $H(\lambda)$ satisfaisant (7.3) : si on suppose $h$ réel, on a $\overline{H(\lambda)} = H(-\lambda)$, d'où

$$H(\lambda)H(-\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^{2p}}$$

D'autre part, on a

$$1+\lambda^{2p} = \prod_{k=0}^{p-1}(\lambda - t_k)(\lambda + t_k)$$
$$t_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2p}\right)$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} 1+\lambda^{2p} &= \frac{(-1)^p}{(2i\pi)^{2p}} \prod_{k=0}^{p-1}(2i\pi\lambda - z_k)(-2i\pi\lambda - z_k) \\ z_k &= 2i\pi t_k \end{aligned}$$

En choisissant alors

$$H(\lambda) = (2\pi)^p \left(\prod_{k=0}^{p-1}(2i\pi\lambda - z_k)\right)^{-1}$$

on vérifie bien (7.3), et, compte tenu de $\mathrm{Re}(z_k) < 0$ pour $k = 0, \dots, p-1$, les conditions de la proposition 7.2 sont satisfaites : ce filtre est réalisable.

# Chapitre 8

# Transformée de Fourier des distributions

## 8.1 Rappels et compléments

### 8.1.1 Convergence d'une suite de distributions

Etant donnée une fonction $f$ mesurable, localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on note $\Lambda_f \in \mathcal{D}'$ la distribution définie pour $\varphi \in \mathcal{D}$ par

$$\langle \Lambda_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Rappelons que si $\Lambda_f = 0$, alors $f = 0$, ce qui permet d'identifier $f$ et $\Lambda_f$. Par abus d'écriture, on écrira $\langle f, \varphi \rangle$ au lieu de $\langle \Lambda_f, \varphi \rangle$. Soient $\Lambda$ et $\Lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, des distributions. On dit que $\Lambda_n$ converge vers $\Lambda$ dans $\mathcal{D}'$ (on notera $\Lambda_n \to \Lambda$ dans $\mathcal{D}'$) si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Lambda_n, \varphi \rangle = \langle \Lambda, \varphi \rangle$$

Exemples : soit $f_n$ une suite de fonctions mesurables et localement intégrables sur $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants :
i) $f_n \to f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$) uniformément sur tout compact,
ii) $f_n \to f$ en norme dans $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$),
iii) $f_n \to f$ simplement p.p. et il existe $g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$) tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p.,
on a $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$ dans $\mathcal{D}'$.

### 8.1.2 Distributions vp$(1/x)$ et Pf$(1/x^2)$

Les fonctions $f(x) = 1/x$ et $g(x) = 1/x^2$ ne sont pas localement intégrables sur $\mathbb{R}$, donc à priori ne définissent pas de distributions (comment définir $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$?). Par contre $F(x) = \log|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $F' = f$ et $F'' = -g$ sur $\mathbb{R}^*$, et définit donc une distribution

$$\Lambda_F \;:\varphi \mapsto \langle F, \varphi \rangle = \int F(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

D'autre part, toute distribution est indéfiniment dérivable (au sens des distributions). On définit alors les distributions $\mathrm{vp}(1/x)$ et $\mathrm{Pf}(1/x^2)$ par :

$$\mathrm{vp}(1/x) = (\Lambda_F)'$$
$$\mathrm{Pf}(1/x^2) = -(\Lambda_F)''$$

En utilisant une intégration par parties, le calcul effectif de ces distributions se fait en utilisant les expressions suivantes :

$$\langle \mathrm{vp}(1/x),\, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$
$$\langle \mathrm{Pf}(1/x^2),\, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx.$$

### 8.1.3 Distributions périodiques

Rappelons que pour $T \in \mathbb{R}$, la translatée $\tau_T v$ d'une distribution $v \in \mathcal{D}'$ est définie par

$$\langle \tau_T v,\, \varphi \rangle \ = \langle v,\, \tau_{-T} \varphi \rangle$$

On dit que $v$ est *T-périodique* si $\tau_T v = v$.
Exemples :
1) $v = f \in \mathrm{L}^q_p(T)$,
2) le peigne de Dirac $\Delta_T$.

### 8.1.4 Séries trigonométriques et distributions

Une série comme $\sum_{n \in Z} \mathrm{e}^{nit}$ n'a pas de sens en tant que fonction. Nous allons voir qu'il est possible de lui donner un sens en tant que distribution. De manière similaire, il existe des fonctions $f \in \mathrm{L}^1_p(0, T)$ telles que la série de Fourier associée $\sum_{n \in Z} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$ diverge pour tout $x$ ! Nous verrons qu'en fait la série converge vers $f$ dans $\mathcal{D}'$.

**Définition 8.1** *Soit $c_n$ une suite de nombres complexes, et $S(t)$ la série formelle*

$$S(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}.$$

*On dit que cette série converge dans $\mathcal{D}'$ si la suite de distributions*

$$S_N(t) = \sum_{|n| \leq N} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

*converge dans $\mathcal{D}'$ (convergence symétrique de la série).*

**Définition 8.2** *Une suite de nombres complexes $c_n$ est dite à croissance lente s'il existe $M > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|c_n| \leq M |n|^k \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

**Proposition 8.3** *Soit $c_n$ une suite de nombres complexes à croissance lente, et $S(t)$ la série formelle*

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}.$$

*La série $S(t)$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution $\Lambda$, périodique de période $T$.*

**Exemple : développement en série de Fourier du peigne de Dirac**

Soit $S(t)$ la série formelle

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, posons

$$\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+nT).$$

Pour $t$ fixé, c'est une somme finie, et la fonction $\Phi$ est T-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$. En notant $\Phi_n$ ses coefficients de Fourier, on a

$$\begin{aligned}
\langle S_N,\,\varphi\rangle \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(t)\,\varphi(t)\;dt \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} S_N(t)\,\varphi(t)\;dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^T S_N(t+nT)\,\varphi(t+nT)\;dt \;=\; \int_0^T S_N(t)\,\Phi(t)\;dt \\
&= \sum_{|n|\le N} \int_0^T \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}\,\Phi(t)\;dt \;=\; \sum_{|n|\le N} T\Phi_{-n}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on a (on sait que la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi_n$ converge vers $\Phi(0)$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \langle S_N,\,\varphi\rangle \;&=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} T\Phi_n \;=\; T\Phi(0) \\
&=\; T\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(nT) \;=\; \langle T\Delta_T, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

La série $S(t)$ converge donc dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution $T\Delta_T$ :

$$\Delta_T = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

**Proposition 8.4** *Soit $f \in \mathrm{L}^1_p(0,T)$, de coefficients de Fourier $c_n$. La série*

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

*converge dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution $\Lambda_f$.*

## 8.2 Distributions tempérées

On souhaite étendre la transformée de Fourier aux distributions. Remarquons que pour $f \in \mathrm{L}^2$, on a d'après la formule de dualité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Si $v$ est une distribution, on aimerait définir $\widehat{v}$ par

$$\langle \widehat{v}, \varphi \rangle \;=\; \langle v, \widehat{\varphi} \rangle$$

Le problème est que $\widehat{\varphi}$ n'est pas forcément un élément de $\mathcal{D}$, et l'expression ci-dessus n'est pas forcément bien définie. Par contre, on a vu que si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. D'où l'idée d'introduire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{S}'$, dont les éléments sont appelés les *distributions tempérées*. De même que $\mathcal{D}'$, l'espace $\mathcal{S}'$ est muni de la topologie faible *, i.e. on dit que $v_n \to 0$ dans $\mathcal{S}'$ si

$$\langle v_n, \varphi \rangle \;\to\; 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{8.1}$$

**Proposition 8.5** *L'injection $\varphi \longmapsto \varphi$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$, et $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$.*

Il en résulte que les éléments de $\mathcal{S}'$ peuvent être identifiés à des éléments de $\mathcal{D}'$. En effet, si $v \in \mathcal{S}'$, sa restriction $\widetilde{v}$ à $\mathcal{D}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$ (si $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}$, alors $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}$, donc $\langle \widetilde{v}, \varphi_n \rangle \;=\; \langle v, \varphi_n \rangle \to 0$). De plus, si $\widetilde{v} = 0$, la distribution tempérée $v$ s'annulant sur un sous-espace dense, elle est forcément nulle sur tout l'espace. Ainsi, si $\widetilde{v} = \widetilde{w}$, alors $v = w$, et la connaissance de $v$ sur $\mathcal{S}$ suffit pour définir entièrement $v$. Enfin, si $v_n \to 0$ dans $\mathcal{S}'$, il est clair d'après (8.1) que $\widetilde{v}_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'$. On retiendra donc l'inclusion algébrique et topologique :

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}',$$

et on ne fera plus de distinction entre $v$ et $\widetilde{v}$.

**Proposition 8.6** *(Principales propriétés de $\mathcal{S}'$)*
*1) Soit $v \in \mathcal{D}'$. Alors $v \in \mathcal{S}'$ si et seulement si $v$ est continu sur $\mathcal{D}$ muni de la topologie de $\mathcal{S}$, i.e. si et seulement si*

$$\varphi_n \in \mathcal{D} \text{ et } \varphi_n \to 0 \text{ dans } \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \langle v, \varphi_n \rangle \;\to 0$$

*2) L'espace $\mathcal{S}'$ est stable :*
*i) pour la multiplication par un élément de $\mathcal{S}$ ou par un polynôme,*
*ii) pour la dérivation (au sens des distributions),*
*De plus, ces opérations sont continues.*

**Exemples de distributions tempérées**

**Définition 8.7** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction. On dit que* $f$ *est à croissance lente s'il existe* $M > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$|f(t)| \leq M(1+t^2)^k \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 8.8** *(exemples)*
*1) Si* $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$, *alors* $f \in \mathcal{S}'$.
*2) Si une fonction* $f$ *est à croissance lente, alors* $f \in \mathcal{S}'$.
*3) Si* $c_n$ *est une suite à croissance lente, alors les séries*

$$v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{nT}, \quad w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nt/T} \qquad (T \neq 0)$$

*convergent dans* $\mathcal{S}'$ *(convergence des sommes partielles symétriques* $\sum_{n=-N}^{N}$*).*
*En particulier, si* $f \in \mathrm{L}^1_p(0,T)$, *alors sa série de Fourier converge dans* $\mathcal{S}'$ *vers* $f$.
*4)* $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$.

## 8.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

On a vu que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}$. Ceci permet de définir la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$ par dualité :

**Définition 8.9** *Soit* $v \in \mathcal{S}'$. *On définit la transformée de Fourier de* $v$, *notée* $\mathcal{F}v$ *ou* $\widehat{v}$, *par*

$$\langle \widehat{v}, \varphi \rangle \;=\; \langle v, \widehat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

*De même, on définit* $\overline{\mathcal{F}}v$ *par*

$$\langle \overline{\mathcal{F}}v, \varphi \rangle \;=\; \langle v, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Il faut vérifier que cette définition coïncide avec celle déjà définie sur $\mathrm{L}^1 \cup \mathrm{L}^2$. Ceci résulte du lemme suivant :

**Lemme 8.10** *Si* $f \in \mathrm{L}^1 \cup \mathrm{L}^2$, *alors* $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{\widehat{f}}$.

Cette définition par dualité fait que la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$ va hériter des propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ :

**Théorème 8.11** *L'application* $v \longmapsto \widehat{v}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}'$, *d'inverse* $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$. *Pour* $v \in \mathcal{S}'$, *on a pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$ :
*i)* $\widehat{v}^{(k)} = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^k \, v\right)$,
*ii)* $\mathcal{F}\left(v^{(k)}\right) = (2i\pi\lambda)^k \, \widehat{v}$,
*iii)* $\widehat{\tau_a v} = \mathrm{e}^{-2i\pi a\lambda} \, \widehat{v}$,
*iv)* $\mathcal{F}\left(e^{2i\pi at} \, v\right) = \tau_a \, \widehat{v}$.

**Exemples**

$$\widehat{\delta_a} = e^{-2i\pi a\lambda} \quad \text{(en particulier } \widehat{\delta} = 1\text{)}$$
$$\mathcal{F}(e^{2i\pi at}) = \delta_a \quad \text{(en particulier} \widehat{1} = \delta\text{)}$$
$$\widehat{\Delta_T} = \frac{1}{T}\Delta_{1/T}$$
$$\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nt/T}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{n/T} \quad \text{(si la suite } c_n \text{ est à croissance lente).}$$

## 8.4 Transformée de Fourier et convolution

### 8.4.1 Transformée de Fourier et convolution $\mathrm{L}^2$

La formule $\widehat{f*g} = \widehat{f}\widehat{g}$ vraie pour $f,\, g \in \mathrm{L}^1$ n'avait pu être généralisée à $\mathrm{L}^2$, car $f*g$ n'est pas forcément dans $\mathrm{L}^1 \cup \mathrm{L}^2$, mais seulement dans $\mathcal{C}^0$. Par contre, on a $f*g \in \mathcal{S}'$ si $f,\, g \in \mathrm{L}^2$, et, grâce à la proposition 6.4, on obtient la généralisation suivante :

**Théorème 8.12** *Soient $f,\, g \in \mathrm{L}^2$. Alors*

$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

### 8.4.2 Transformée de Fourier et convolution $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$

**Théorème 8.13** *Soient $v \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors la convolution $v*\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, et on a :*
*i) $\widehat{v*\varphi} = \widehat{v}\,\widehat{\varphi}$,*
*ii) $\widehat{v\varphi} = \widehat{v} * \widehat{\varphi}$.*
*De plus, l'application $(v,\varphi) \mapsto v*\varphi$ est continue de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}^\infty$.*

### 8.4.3 Transformée de Fourier et convolution $\mathcal{S}' * \mathcal{E}'$

Notons que l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact est inclus dans $\mathcal{S}'$.

**Proposition 8.14** *Soient $v \in \mathcal{S}'$ et $w \in \mathcal{E}'$. Alors la convolution $v*w$ est dans $\mathcal{S}'$.*

**Proposition 8.15** *Soit $w \in \mathcal{E}'$. Alors $\widehat{w}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées.*

**Théorème 8.16** *Soient $v \in \mathcal{S}'$ et $w \in \mathcal{E}'$. Alors on a*

$$\widehat{v*w} = \widehat{v}\,\widehat{w}.$$

**Corollaire 8.17** *Soient $v,\, w \in \mathcal{S}'$. Si $\widehat{v} \in \mathcal{S}'$ et $\widehat{w} \in \mathcal{E}'$, alors $vw$ est dans $\mathcal{S}'$ et*

$$\widehat{vw} = \widehat{v} * \widehat{w}.$$

### Application aux filtres

On considère un filtre $A : x \longmapsto y = h * x$. Si l'on est dans l'un des cas précédents, alors la fonction de transfert $H$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h$, i.e. $H = \widehat{h}$, et

$$\widehat{y} = H\,\widehat{x}.$$

# Chapitre 9

# Echantillonnage des signaux

## 9.1 Formule de Poisson et distributions périodiques

Soit $v \in \mathcal{E}'$ une distribution à support compact, et $w = v * \Delta_T$. La distribution $w$ est tempérée (Prop. 8.14), périodique de période $T$. On utilise la notation suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} v(t - nT) := v * \Delta_T.$$

Les valeurs ponctuelles $v(t - nT)$ peuvent très bien ne pas avoir de sens.

Cette distribution admet le développement en série de Fourier suivant :

**Théorème 9.1** *(Formule de Poisson) On a l'égalité dans $\mathcal{S}'$ :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} v(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(\frac{n}{T})\mathrm{e}^{2i\pi nt/T} \tag{9.1}$$

**Remarque 9.1** *Le terme de droite de (9.1) a un sens : $\widehat{v}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente (Prop. 8.15), la suite $\widehat{v}(\frac{n}{T})$ est à croissance lente, définissant ainsi une distribution tempérée (cf. Prop. 8.8).*

Cette formule s'étend aux fonctions intégrables $f \in \mathrm{L}^1$. Il faut cependant donner un sens à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - nT)$ :

**Lemme 9.2** *Soit $f \in \mathrm{L}^1$, $T > 0$, et $g(t)$ la série*

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - nT).$$

*Cette série converge (symétriquement) dans $\mathrm{L}^1_p(0, T)$ vers une fonction $g \in \mathrm{L}^1_p(0, T)$, qui a pour coefficients de Fourier*

$$g_n = \frac{1}{T}\widehat{f}(\frac{n}{T}).$$

Compte tenu de la Prop. 8.8, la série de Fourier de $g$ converge vers $g$ dans $\mathcal{S}'$, ce qui n'est autre que la formule de Poisson.

**Remarque 9.2** *On peut montrer que si de plus $f' \in \mathrm{L}^1$, alors l'égalité a lieu pour tout $t$, la convergence des séries étant uniforme.*

**Remarque 9.3** *La même formule est fausse pour une fonction $f \in \mathrm{L}^2$ (considérer la fonction* sinc*).*

Nous avons obtenu ainsi le développement en série de Fourier pour une classe particulière de distributions périodiques : celles qui sont de la forme $w = v * \Delta_T,\ v \in \mathcal{E}'$. Si maintenant $w$ est une distribution périodique quelconque, admet-elle aussi un développement en série de Fourier ? D'après ce qui précède, la réponse sera oui si on peut trouver $v \in \mathcal{E}'$ tel que l'on ait $w = v * \Delta_T$. Si $w$ est une fonction $T$-périodique, on peut prendre simplement $v(t) = w(t)\mathrm{rect}_T(t)$, ce qui donne bien $w = v * \Delta_T$. Cependant, dans le cas d'une distribution $w$, le produit $w\mathrm{rect}_T$ peut ne pas être défini. On va donc approcher $\mathrm{rect}_T$ par une fonction $\theta \in \mathcal{D}$ telle que l'on ait

$$w = (\theta\, w) * \Delta_T$$

L'existence d'une telle fonction est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 9.3** *Il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que*

$$\theta * \Delta_T(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En posant alors $v = \theta\, w$, on a $v \in \mathcal{E}'$ et $w = v * \Delta_T$, et en appliquant le théorème 9.1, on obtient le résultat suivant :

**Proposition 9.4** *Soit $w$ une distribution $T$-périodique. Il existe $v \in \mathcal{E}'$ tel que $w = v * \Delta_T$. De plus, $w$ admet le développement en série de Fourier convergant dans $\mathcal{S}'$*

$$w = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(\frac{n}{T})\mathrm{e}^{2i\pi nt/T},$$

*et ce développement est unique. La suite $\widehat{v}(\frac{n}{T})$ est à croissance lente, et*

$$\widehat{w} = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(\frac{n}{T})\delta_{n/T}.$$

**Remarque 9.4** *La formule de Poisson admet la forme duale suivante : pour toute fonction $f$ telle que $\widehat{f}$ soit à support compact, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\lambda - n/T) = T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\mathrm{e}^{-2i\pi n\lambda T}.$$

## 9.2 Echantillonnage d'un signal

Considérons maintenant un signal $f$ dont la transformée de Fourier soit à support inclus dans $[-B, B]$, $B > 0$. Rappelons que $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$, à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. La fonction $f$ est échantillonnée à la cadence $T > 0$, i.e. $f$ est approchée par

$$f_T(t) := T\Delta_T f = T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta_{nT}.$$

On remarquera que $f_T \to f$ dans $\mathcal{D}'$ : $\langle f_T, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T\, f(nT)\varphi(nT)$ est une somme de Riemann avec $f\varphi$ continue à support borné, qui tend donc vers $\int f\varphi\, dx$ quand $T \to 0$.

On a

$$\begin{aligned}\widehat{f_T}(\lambda) &= \Delta_{1/T} * \widehat{f}(\lambda)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\lambda - n/T).\end{aligned}$$

Autrement dit, échantillonner $f$ à la cadence $T$ revient à périodiser $\widehat{f}$ avec la période $1/T$. On peut alors faire la constatation fondamentale suivante :
si $1/T > 2B$, on a $\mathrm{rect}_{2B}(\lambda)\widehat{f_T}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$, i.e. on peut reconstruire $f$ par filtrage passe-bas de $f_T$.

**Théorème 9.5** *(Théorème de Shannon) Soit $f$ un signal dont la transformée de Fourier soit à support inclus dans $]-B, B[$, $B > 0$. Si $1/T \geq 2B$, alors*

$$rect_{2B}(\lambda)\widehat{f_T}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda).$$

*Si $f \in \mathrm{L}^2$, alors on a la formule de Shannon :*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) sinc(t/T - n) \qquad \textit{dans } \mathrm{L}^2.$$

*Si de plus $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(nT)| < \infty$, l'égalité a lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

En pratique, ceci signifie que si $h_{BT}$ est un filtre passe-bas tel que

$$\widehat{h}_{BT}(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\lambda| \leq B \\ 0 \text{ si } |\lambda| \geq \frac{1}{T} - B \end{cases}$$

alors le signal est reconstruit sans perte d'information :

$$f_T * h_{BT} = f.$$

Souvent, l'échantillonnage d'un signal est précédé d'un filtrage passe-bas (filtrage anti-repliement ou anti-"aliasing"), afin d'éliminer les hautes fréquences indésirables.

# Chapitre 10

# Signaux et filtres discrets

## 10.1 Introduction

Les signaux discrets sont par définition des distributions tempérées de la forme

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \, \delta_{nT}, \qquad x_n \in \mathbb{C}.$$

On peut déduire de la proposition 9.4 que la suite complexe $x_n$ est à croissance lente. De tels signaux proviennent par exemple de l'échantillonnage d'un signal à temps continu, mais peuvent aussi représenter un texte, une suite d'indicateurs économiques,... Quitte à effectuer un changement d'échelle, on peut supposer que $T = 1$, i.e on ne considèrera que des signaux discrets de la forme

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \, \delta_n.$$

Les filtres discrets sont des filtres de la forme $x \longmapsto y = h * x$ où $x$ est un signal discret et $h$ est une distribution tempérée de la forme

$$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \delta_n, \qquad h_n \in \mathbb{C}.$$

L'un des intérêts des filtres discrets est de pouvoir réaliser sous certaines hypothèses un filtrage équivalent à celui effectué sur des signaux à temps continu. En effet, soit $x \in \mathcal{S}'$ un signal à temps continu et $x_T$ son échantillonné. On se place sous les hypothèses du théorème de Shannon, à savoir $\operatorname{supp} \widehat{x} \subset ]-B, B[,\ B < \frac{1}{2T}$. Si $h_{BT}$ est un filtre passe-bas tel que

$$\widehat{h}_{BT}(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\lambda| \leq B \\ 0 \text{ si } |\lambda| \geq \frac{1}{T} - B \end{cases},$$

on sait que $x_T * h_{BT} = x$. Supposons maintenant que l'on veuille filtrer $x$ avec un filtre $h$ :

$$y = h * x.$$

On se place dans le cas où ce produit est bien défini ainsi que $\widehat{y} = \widehat{h}\widehat{x}$. Comme $\operatorname{supp}\widehat{x} \subset ]-B, B[$, on peut supposer que $\operatorname{supp}\widehat{h} \subset ]-B, B[$. On a alors $h_T * h_{BT} = h$ et $y_T * h_{BT} = y$. On peut alors vérifier que

$$x_T * h_T = y_T,$$

d'où

$$x_T * h_T * h_{BT} = y.$$

Ceci signifie que le filtrage à temps continu $y = h * x$ peut être remplacé par le filtrage discret $x_T * h_T$ suivi d'un filtrage passe-bas.

Une application interessante des filtres discrets est le codage en sous-bandes, réalisé au travers de bancs de filtres. Ce procédé permet de décomposer un signal discret en ses composantes basses fréquences et hautes fréquences, et a des applications dans la compression de données, très utiles dans le domaine des images numériques. L'itération de ce procédé conduit à la décomposition en ondelettes, qui sera abordée dans le cours de signal de cinquième année. Nous décrirons à la fin de ce chapitre le principe des bancs de filtres à reconstrucion parfaite, qui permettent la reconstruction du signal à partir de ses composantes basses et hautes fréquences.

## 10.2 Convolution

**Proposition 10.1** *La convolution de deux signaux discrets $x*y$ est bien définie dans chacun des cas suivants :*
*1) $x \in \mathcal{S}'$, $y \in \mathcal{E}'$ (et réciproquement),*
*2) $x,\ y \in \mathcal{D}'_+$ (resp. $x,\ y \in \mathcal{D}'_-$),*
*3) $x \in \mathcal{S}'$ et $y_n$ est à décroissance rapide (et réciproquement),*
*4) $x_n,\ y_n \in l^2$ (i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$, idem pour $y$).*
*Pour tout entier relatif $n$, la somme*

$$z_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, y_{n-k}$$

*est absolument convergente, et la distribution $z$ définie par $z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n \delta_n$ est dans $\mathcal{S}'$ dans les cas 1, 3, 4, dans $\mathcal{D}'_+$ (resp $\in \mathcal{D}'_-$) dans le cas 2, et vérifie*

$$z = x * y.$$

**Proposition 10.2** *Dans les cas 1, 3 et 4 de la proposition précédente, on a dans $\mathcal{S}'$*

$$\widehat{x * y} = \widehat{x}\, \widehat{y}.$$

## 10.3 Transformée en z d'un signal discret

### 10.3.1 Définition

En faisant le changement de variable

$$z = \mathrm{e}^{2i\pi\lambda}$$

on a dans $\mathcal{S}'$

$$\widehat{x}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n}.$$

Cette série de Laurent définit une fonction holomorphe dans une couronne $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\}$, où $1/r$ est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x_n z^n$ et $R$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x_{-n} z^n$.

**Définition 10.3** *Si $r < R$, la transformée en z du signal $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta_n$ est la fonction holomorphe définie sur $C(r, R)$ par*

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n}.$$

On remarquera que si $r < 1 < R$ on a pour $\lambda$ réel :

$$X(\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}) = \widehat{x}(\lambda).$$

### 10.3.2 Inversion de la transformée en z

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe donnée sur une couronne $C(r, R)$, $r < R$, par unicité du développement en série de Laurent, il existe une unique distribution $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta_n$ telle que $f(z) = X(z)$ (attention, il est nécessaire de préciser la couronne). Citons deux méthodes pour retrouver les coefficients $x_n$ connaissant $X(z)$ :
1) on développe directement $X$ en série de Laurent; applicable à toute fraction rationnelle.
2) on utilise la formule de Cauchy :

$$x_n = \int_{\Gamma^+} X(z) z^{n-1}\, dz,$$

où $\Gamma$ est un cercle de centre 0 de rayon $r'$, $r < r' < R$, orienté dans le sens direct (ou plus généralement un circuit fermé contenu dans $C(r, R)$, d'indice 1 et orienté dans le sens direct). Pour calculer cette intégrale, on peut par exemple utiliser le théorème des résidus : si on note $a_j$ les pôles de $X(z)$ de module inférieur ou égal à $r$ et $b_j$ ceux de module supérieur ou égal à $R$, on a les deux possibilités suivantes pour calculer $x_n$ :

$$x_n = \sum_j \mathrm{res}(X(z)z^{n-1}, a_j)$$

$$x_n = -\sum_j \mathrm{res}(X(z)z^{n-1}, b_j) - \mathrm{res}(X(z)z^{n-1}, \infty).$$

Rappelons que $\mathrm{res}(f,a)$ est le coefficient $c_{-1}$ du développement en série de Laurent de $f$ autour de $a$ :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n,$$

et que $\mathrm{res}(f(z),\infty)$ est défini par

$$\mathrm{res}(f(z),\infty) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} f(z)\, dz,$$

où $C^+$ est un cercle orienté dans le sens direct contenant tous les pôles de $f$ (ou plus généralement un circuit fermé d'indice 1, orienté dans le sens direct et contenant tous les pôles de $f$).

### 10.3.3 Propriétés de la Transformée en z

Soient $x$ et $y$ deux signaux discrets, de transformées en z $X(z)$ et $Y(z)$, définies respectivement sur les couronnes $C(r,R)$ et $C(r',R')$.
1) Effet d'un retard : la transformée en z de $\tau_k x$ est $z^{-k}X(z)$.
2) Si $r<1<R$ et $r'<1<R'$, le signal $z = xy := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n \delta_n$ a pour transformée en z une fonction $Z$ définie sur la couronne $C(rr', RR')$, qui vérifie

$$Z(\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}) = \int_0^1 \widehat{x}(s)\widehat{y}(\lambda - s)\, ds, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

**Proposition 10.4** *Soient $x$ et $h$ deux signaux discrets vérifiant l'une des hypothèses de la proposition 10.1. Soient $C_x$ et $C_h$ les couronnes de définition de leurs transformées en z. On suppose que $C_x \cap C_h \neq \emptyset$. Soit $y = h * x$. On a alors pour $z \in C_x\cap C_h$ :*

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

## 10.4 Filtres discrets

### 10.4.1 Fonction de transfert en $z$

Soit $x$ un signal discret. Si $x$ et $h$ vérifient l'une des hypothèses de la proposition 10.4, la sortie $y = h * x$ a pour transformée en z

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

Par analogie avec le temps continu, $H$ est appelée la *fonction de transfert en $z$* du filtre $h$.

### 10.4.2 Causalité et stabilité

On considère le filtre discret

$$x \longmapsto y = h * x$$

où $x$ et $h$ vérifient l'une des hypothèses de la proposition 10.1. On sait que ce filtre est réalisable si et seulement si $\operatorname{supp} h \subset \mathbb{R}_+$, ce qui revient ici à dire que

$$h_n = 0 \qquad \forall n < 0.$$

Comme pour temps continu, disposant d'un gabarit, on cherche un filtre réalisable qui satisfasse les contraintes de ce gabarit. Le plus simple est de prendre pour $H(z)$ une fraction rationnelle :

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Il existe de nombreux algorithmes permettant d'obtenir une telle fraction, l'un des plus connus étant l'algorithme de Remez (cf. Signal Processing Toolbox dans Matlab).

On note $b_1, \ldots, b_s$ les pôles de $H$, rangés par module croissant.

**Proposition 10.5** *Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients complexes. On peut associer à la fraction $P/Q$ un filtre réalisable $H = P/Q$ si et seulement si $deg(P) \leq deg(Q)$. Dans ce cas le filtre réalisable associé à cette fraction est*

$$h = \sum_{n \geq 0} h_n \delta_n$$

*où les $h_n$ sont les coefficients du développement en série de Laurent de $P/Q$ sur la couronne extérieure $C(|b_s|, \infty)$.*

Soit $x \longmapsto y = h * x$ un filtre réalisable, avec $H = P/Q$. Les coefficients de $y$ peuvent être calculés directement par

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k} \\ &= \sum_{k \leq n} x_k h_{n-k}. \end{aligned}$$

Un autre possibilité est la suivante, plus efficace en temps de calculs : en posant $q = \deg(Q)$, et en divisant le numérateur et le dénominateur de $P/Q$ par $z^q$, la fraction $P/Q$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \\ &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_r z^{-r}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}} \end{aligned}$$

où $b_0 \neq 0$ (c'est le coefficient de degré le plus élevé de $Q$). On a donc

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q})Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_r z^{-r})X(z)$$

et d'après la formule du retard :

$$(b_0\delta + b_1\delta_1 + \ldots + b_q\delta_q) * y = (a_0\delta + a_1\delta_1 + \ldots + a_r\delta_r) * x$$

c'est à dire que pour tout $n$ on a

$$b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_r x_{n-r}$$

ce qui permet le calcul par récurrence de $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ (en supposant que le signal $x$ soit causal, i.e. $x_n = 0$ pour $n < 0$). Pour la stabilité des calculs, on demande que le filtre soit *stable*, i.e. qu'il existe une constante $C$ telle que pour tout signal borné $x$ on ait l'inégalité

$$||((h * x)_n)_{n \in Z}||_\infty \leq C||(x_n)_{n \in Z}||_\infty.$$

**Proposition 10.6** *On se place sous l'une des hypothèses de la proposition 10.1. Alors le filtre $h$ est stable si et seulement si la suite $h_n$ est dans $l^1$.*

**Corollaire 10.7** *Soit $P/Q$ une fraction rationnelle avec deg(P) $\leq$ deg(Q). Soit $h$ le filtre réalisable associé à cette fraction. Alors $h$ est stable si et seulement si tous les pôles de la fraction sont dans la boule unité $B(0,1)$.*

### 10.4.3 Filtres RIF et filtres RII

Considérons un filtre réalisable de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_r z^{-r}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}}$$

normalisé avec $b_0 = 1$. Soit $x$ un signal causal, et $y$ le signal filtré $y = h * x$.
Deux cas se présentent :
1) $q = 0$. On a alors

$$h = \sum_{n=0}^{r} a_n \delta_n$$

et la relation de récurrence s'écrit simplement :

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_r x_{n-r}.$$

De tels filtres sont appelés *filtres à réponse impulsionnelle finie* (filtres RIF), ou *filtres transversaux.*
2) $q \geq 1$. Dans ce cas $H(z)$ a au moins un pôle non nul, donc les $h_n$ non nuls sont en nombre infini (une somme finie $\sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n}$ n'a que zéro pour pôle) : on dit que le filtre est à *réponse impulsionnelle infinie* (filtres RII), ou que c'est un *filtre récursif*, puisque $y_n$ est calculé récursivement par

$$y_n = -(b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q}) + a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_r x_{n-r}.$$

Dans le cas où $r = 0$ (avec $a_0 \neq 0$), un tel filtre est dit *purement récursif.*

### 10.4.4 Filtres à phase linéaire

Dans de nombreuses applications (en particulier en transmission d'images numériques), on a besoin de filtres dits *à phase linéaire* : ce sont des filtres réels et réalisables dont la fonction de transfert s'écrit

$$H(\lambda) = \rho(\lambda)\mathrm{e}^{-2i\pi(\lambda_0+\tau\lambda)}$$

Le retard de phase $\lambda_0$ et le retard de groupe $\tau$ sont des nombres réels, ainsi que $\rho(\lambda)$ (au sens strict, il faudrait que $\rho(\lambda)$ soit positif, ce qui n'est *pas* imposé ici).

**Proposition 10.8** *Soit $h$ un filtre discret réel réalisable $h = \sum_{n\geq 0} h_n\delta_n$.*
*i) Si $h$ est à phase linéaire, alors $h$ est un filtre RIF : il existe un entier $r$ tel que*

$$h = \sum_{n=0}^{r} h_n\delta_n.$$

*De plus, il existe un entier $N$ tel que l'on ait soit*

$$h_n = h_{N-n} \ \forall\ n,$$

*soit*

$$h_n = -h_{N-n} \ \forall\ n.$$

*Dans le premier cas le filtre est dit symétrique, dans le second antisymétrique.*
*ii) Réciproquement, si $h$ est symétrique ou antisymétrique, alors $h$ est à phase linéaire.*

On en déduit alors la forme suivante pour la fonction de transfert en z d'un filtre à phase linéaire : c'est un polynôme en $z^{-1}$, $H_z(z) = P(z^{-1})$, les racines de $P$ sont réelles ou conjuguées deux à deux (car $P$ est réel), et la propriété de symétrie fait que $P(z) = \pm z^N P(z^{-1})$ ($N$ est donné par la proposition précédente, c'est un entier supérieur ou égal au degré de $P$). Si $z \neq 0$ est une racine de $P$, alors $z^{-1}$ est aussi racine de $P$. On a donc

$$H_z(z) = C\, z^{-k} \prod_{i=1}^{I}(z^{-1}-r_i)(z^{-1}-r_i^{-1}) \prod_{j=1}^{J}(z^{-1}-z_j)(z^{-1}-\overline{z}_j)(z^{-1}-z_j^{-1})(z^{-1}-\overline{z}_j^{-1})$$

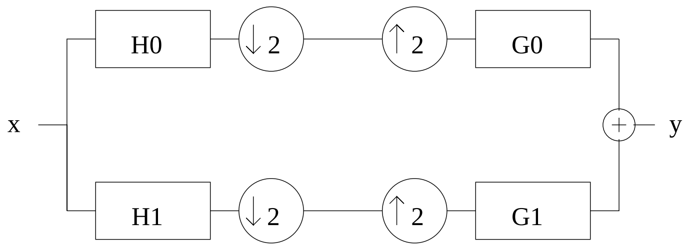
avec les $r_i \neq 0$ et $C$ réels, les $z_j$ non réels, et

$$k,\ I,\ J\ \in\ \mathbb{N},\ k+2I+4J = \deg(P) = \mathrm{longueur}(h)+1.$$

### 10.4.5 Bancs de filtres à reconstruction parfaite

Le shéma du codage-décodage en deux sous-bandes d'un signal discret $x$ est le suivant :

Le signal discret d'entrée $x$ est filtré par deux filtres RIF, un filtre passe-bas $h_0$ et un filtre passe-haut $h_1$, appelé filtre complémentaire. Après décimation d'un facteur 2 (suppression d'une valeur sur deux, flèche vers le bas sur le shéma), on obtient deux signaux $x_1$ et $x_2$




(les deux sous-bandes). A la reconstruction, on interpole d'un facteur 2 (on intercale un zéro entre chaque valeur, flèche vers le haut sur le shéma), et on filtre les deux signaux obtenus avec les filtres RIF $g_0$ et $g_1$. En additionnant les deux signaux sortants, on obtient un signal $y$. Un tel codage en sous-bandes peut être utilisé pour la compression d'images, et est à la base de l'analyse multirésolution en théorie des ondelettes.

**Définition 10.9** *On dit que ce banc de filtres est à reconstruction parfaite si la sortie est un retard : il existe un entier $k$ tel que*

$$Y(z) = z^{-k} X(z).$$

**Lemme 10.10** *Soit $u$ le signal obtenu par décimation d'un facteur 2 de $x$, et $v$ celui obtenu par interpolation d'un facteur 2. Alors*

$$\begin{aligned} U(z^2) &= \frac{1}{2}(X(z) + X(-z)), \\ V(z) &= X(z^2). \end{aligned}$$

**Lemme 10.11** *La sortie du banc de filtres s'écrit*

$$Y(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) + \frac{1}{2}[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z).$$

**Théorème 10.12** *Le banc de filtres est à reconstruction parfaite si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait les relations :*

$$\begin{aligned} H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) &= 0, \\ H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) &= 2z^{-k}. \end{aligned}$$

Un choix commode consiste à prendre

$$\begin{aligned} G_0(z) &= H_1(-z), \\ G_1(z) &= -H_0(-z). \end{aligned}$$

Les conditions du théorème se réduisent alors à

$$H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) = 2z^{-k}.$$

On montre alors que si les filtres sont à phase linéaire, les seules solutions possibles sont :

- solutions de type A : $H_0$ et $H_1$ sont de symétries opposées, leurs longueurs sont paires et diffèrent d'un multiple pair de 2,

- solutions de type B : $H_0$ et $H_1$ sont symétriques, leurs longueurs sont impaires et diffèrent d'un multiple impair de 2.

D'autres possibilités existent pour des filtres à phase non linéaire, en particuliers les bancs de filtres *orthogonaux*, cf. [8].

# Bibliographie

[1] M Bellanger. *Traitement numérique du signal.* Masson, 1994.

[2] R Boite and H Leich. *Les filtres numériques.* Masson, 1990.

[3] I Daubechies. *Ten lectures on wavelets.* SIAM, 1992.

[4] J.P Delmas. *Eléments de théorie du signal : les signaux déterministes.* Ellipses, 1991.

[5] C Gasquet and P Witomski. *Analyse de Fourier et applications.* Masson, 1990.

[6] Y Meyer. *Les ondelettes, algorithmes et applications.* A. Colin, 1992.

[7] W Rudin. *Functional analysis.* Mc Graw-Hill, 1991.

[8] G Strang and T Nguyen. *Wavelets and Filter Banks.* Wellesley, Cambridge Press, 1996.